Moering Ingenieur
Büro für Holz + Handwerk

Heckenäcker 22
34537 Bad Wildungen

Tel.: 05621 96 22 26

Webseite:
www.moering.de//

E-Mail:
info@moering.de

17. August 2012

Barbara Moering • Heckenäcker 22 • 34537 Bad Wildungen

Der goldene Schnitt

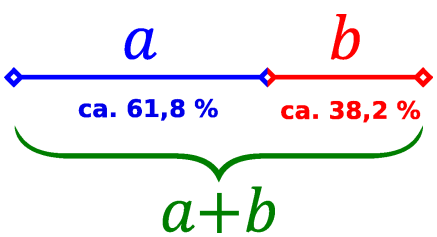
Eine Auswahl verschiedener Dokumentationen

1) Autorenteam - Der goldene Schnitt (Wikipedia) (2)

2) Dirk Stegmann - Der goldene Schnitt (Universität Hildesheim) (29)

3) August Wiegand - Der allgemeine goldene Schnitt (googlebooks) (74)

Goldener Schnitt



Proportionen beim Goldenen Schnitt einer Strecke: $\Phi = a : b = (a + b) : a$

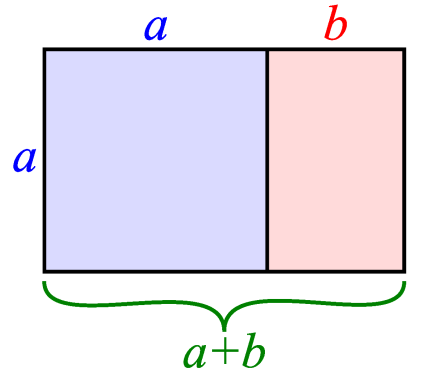
Als **Goldenen Schnitt** (*sectio aurea*, *proportio divina*) bezeichnet man ein bestimmtes Teilungsverhältnis einer Strecke oder anderen Größe, bei dem das Verhältnis des Ganzen zu seinem größeren Teil (auch *Maior* genannt) dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil (dem *Minor*) entspricht. Als Formel ausgedrückt (mit a als Maior und b als Minor) gilt:

$$a : b = (a + b) : a$$

Das mittels Division dieser Größen als Zahl berechnete *Teilungsverhältnis des Goldenen Schnittes* ist eine irrationale Zahl, das heißt eine Zahl, die sich nicht als Bruch darstellen lässt. Diese wird ebenfalls als Goldener Schnitt oder auch als *Goldene Zahl* bezeichnet. Als mathematisches Symbol für diese Zahl wird meist der griechische Buchstabe Phi (*Φ*, *φ*), seltener auch Tau (*T*, *τ*) oder einfach *g*, verwandt.

Die Kenntnis des *Goldenen Schnittes* ist in der mathematischen Literatur seit der Zeit der griechischen Antike (Euklid) nachgewiesen. Vereinzelt schon im Spätmittelalter (Campanus von Novara) und besonders dann in der Renaissance (Luca Pacioli, Johannes Kepler) wurde er auch in philosophische und theologische Zusammenhänge gestellt. Seit dem 19. Jahrhundert wurde er zunächst in der ästhetischen Theorie (Adolf Zeising) und dann auch in künstlerischer, architektonischer und kunsthandwerklicher Praxis als ein ideales Prinzip ästhetischer Proportionierung bewertet. Die wahrnehmungspsychologische Frage der Nachweisbarkeit einer derart besonderen ästhetischen Wirkung ist in der Forschung allerdings umstritten, desgleichen die historische Frage, ob der *Goldene Schnitt* auch schon bei der Proportionierung von Kunst- und Bauwerken älterer Epochen eine Rolle gespielt hat.

Definition und elementare Eigenschaften



Beide Rechtecke sind Goldene (animierte Darstellung).

Eine Strecke AB der Länge s wird durch einen Punkt T innen so geteilt, dass die Länge a des größeren Teilabschnittes AT *mittlere Proportionale* zwischen den Längen b der kleineren und der gesamten Strecke wird. Es gilt somit AB : AT = AT : TB. Diese so entstandene Teilung heißt *Goldener Schnitt* der Strecke AB. Das Verhältnis der beiden Streckenabschnitte AT : TB wird als *Goldene Zahl* bezeichnet.[1]

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Wird eine Strecke s im Goldenen Schnitt geteilt, so gilt für den längeren Abschnitt

$$a = \frac{s}{\Phi} \approx 0{,}618s$$

und für den kürzeren

$$b = s - \frac{s}{\Phi} \approx 0{,}382s.$$

Die *Goldene Zahl* ist eine irrationale Zahl, das heißt, sie lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. Sie ist jedoch eine algebraische Zahl vom Grad 2, insbesondere kann sie mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Ferner ist sie besonders schlecht durch Brüche approximierbar.[2] Aus diesem Grund wird sie in der Literatur gelegentlich auch als *irrationalste Zahl* bezeichnet.[3] Diese Eigenschaft wird im Abschnitt Approximationseigenschaften der Goldenen Zahl genauer erläutert.

Geometrische Aussagen

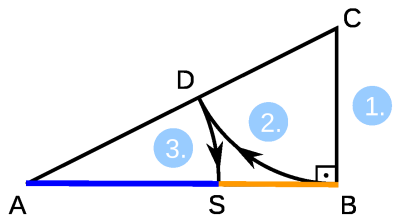
Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Als Konstruktionsverfahren werden in der Geometrie nur diejenigen Verfahren akzeptiert, die sich auf die Verwendung von Zirkel und Lineal (ohne Skala) beschränken. Für die Teilung einer Strecke im Verhältnis des *Goldenen Schnittes* gibt es eine Fülle derartiger Verfahren, von denen im Folgenden exemplarisch nur einige erwähnt werden. Man unterscheidet dabei eine *innere* und *äußere* Teilung. Bei der *äußeren Teilung* wird der in der Verlängerung der Ausgangsstrecke außen liegende Punkt gesucht, der die vorhandene Strecke zum (größeren) Teil des *Goldenen Schnittes* macht. Aufgeführt werden im folgenden auch zwei moderne, von Künstlern gefundene Konstruktionen.

Innere Teilung

- Klassisches Verfahren mit innerer Teilung, das wegen seiner Einfachheit beliebt ist:

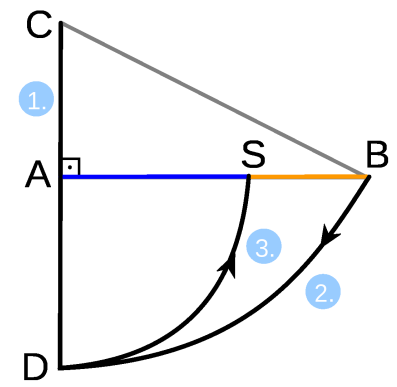
1. Errichte auf der Strecke AB im Punkt B eine Senkrechte der halben Länge von AB mit dem Endpunkt C.
2. Der Kreis um C mit dem Radius CB schneidet die Verbindung AC im Punkt D.
3. Der Kreis um A mit dem Radius AD teilt die Strecke AB im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*.



Klassische innere Teilung

- Innere Teilung nach Euklid:

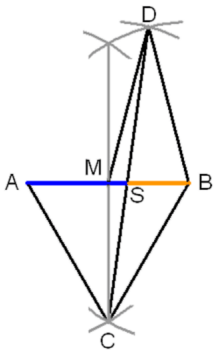
1. Errichte auf der Strecke AB im Punkt A eine Senkrechte der halben Länge von AB mit dem Endpunkt C.
2. Der Kreis um C mit dem Radius CB schneidet die Verlängerung von AC im Punkt D.
3. Der Kreis um A mit dem Radius AD teilt die Strecke AB im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*.



Innere Teilung: Verfahren nach Euklid

- Konstruktion nach dem österreichischen Künstler Kurt Hofstetter, die dieser 2005 im *Forum Geometricorum* [4] publizierte:

1. Halbiere die Strecke AB in M durch Streckensymmetrale mit Radius AB und konstruiere dabei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge AB und C unterhalb von AB.
2. Konstruiere ein gleichschenkeliges Dreieck MBD mit Schenkellänge AB über der Grundlinie MB
3. Die Strecke CD teilt die Strecke AB im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*.

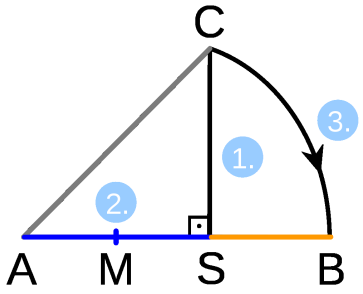


Konstruktion nach Hofstetter

Äußere Teilung

- Klassisches Verfahren mit äußerer Teilung:

1. Errichte auf der Strecke AS im Punkt S eine Senkrechte der Länge AS mit dem Endpunkt C.
2. Konstruiere die Mitte M der Strecke AS.
3. Der Kreis um M mit dem Radius MC schneidet die Verlängerung von AS im Punkt B. S teilt AB im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*.

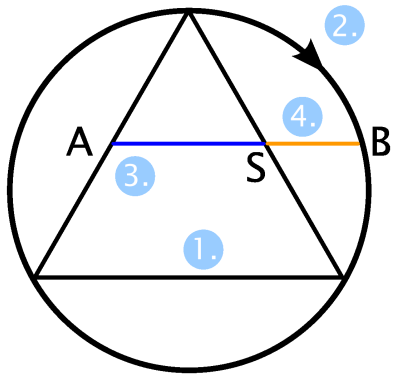


Äußere Teilung

- Konstruktion nach dem amerikanischen Künstler George Odom, die dieser 1982 entdeckte:

1. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck.
2. Konstruiere den Umkreis, also den Kreis, der durch alle Ecken des Dreiecks verläuft.
3. Halbiere zwei Seiten des Dreiecks in den Punkten A und S.
4. Die Verlängerung von AS schneidet den Kreis im Punkt B. S teilt AB im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*.

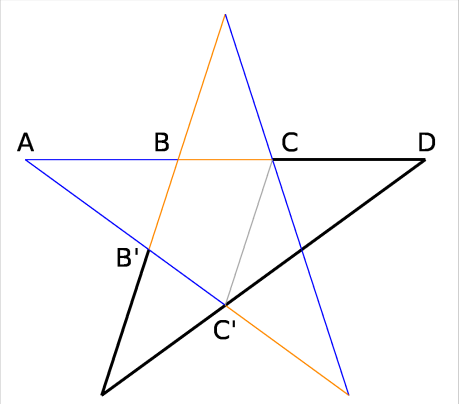
   Beginnt man mit der Strecke AS, so konstruiert man über der halben Strecke das in S rechtwinklige Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt (Höhe: AS/2, 2. Kathete: AS)



Konstruktion nach Odom

Anstatt stets neu konstruieren zu müssen, wurde im 19. Jahrhundert von Künstlern und Handwerkern ein *Goldener Zirkel* – ein auf das Goldene Verhältnis eingestellter Reduktionszirkel – benutzt. Insbesondere im Schreinerhandwerk wurde ein ähnliches Instrument in Form eines Storchschnabels benutzt.[5]

Der Goldene Schnitt im Fünfeck und im Pentagramm



Pentagramm

Regelmäßiges Fünfeck und Pentagramm bilden jeweils eine Grundfigur, in der das Verhältnis des *Goldenen Schnittes* wiederholt auftritt. Die Seite eines regelmäßigen Fünfecks z.B. befindet sich im *Goldenen Schnitt* zu seinen Diagonalen. Die Diagonalen untereinander wiederum teilen sich ebenfalls im goldenen Verhältnis, d. h. AD verhält sich zu BD wie BD zu CD. Der Beweis dazu nutzt die Ähnlichkeit geeignet gewählter Dreiecke.

Das Pentagramm, eines der ältesten magischen Symbole der Kulturgeschichte, steht in einer besonders engen Beziehung zum *Goldenen Schnitt*. Zu jeder Strecke und Teilstrecke im Pentagramm findet sich ein Partner, der mit ihr im Verhältnis des *Goldenen Schnittes* steht. In der Abbildung sind alle drei möglichen Streckenpaare jeweils blau (längere Strecke) und orange (kürzere Strecke) markiert. Sie lassen sich über das oben beschriebene Verfahren der *stetigen Teilung* nacheinander erzeugen. Im Prinzip ist es damit in das verkleinerte Pentagramm fortsetzbar, das man in das innere Fünfeck zeichnen könnte, und damit auch in alle weiteren. Stünden die beiden Strecken in einem Verhältnis ganzer Zahlen, müsste dieses Verfahren der fortgesetzten Subtraktion irgendwann Null ergeben und damit abbrechen. Die Betrachtung des Pentagramms zeigt aber anschaulich, dass das nicht der Fall ist.

Für den Beweis, dass es sich um den Goldenen Schnitt handelt, beachte man, dass neben den vielen Strecken, die aus offensichtlichen Symmetriegründen gleich lang sind, auch CD=CC' gilt. Ursache ist, dass das Dreieck DCC' zwei gleiche Winkel besitzt, wie man durch Parallelverschiebung der Strecke CC' erkennen kann, und daher gleichschenklig ist. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}}$$

Ersetzt man AC=AB+BC und beachtet die Gleichheit der auftretenden Teilstücke, so erhält man genau die obige Definitionsgleichung für den *Goldenen Schnitt*.

Goldenes Rechteck und Goldenes Dreieck

Ein *Rechteck*, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, bezeichnet man als Goldenes Rechteck. Ebenso nennt man ein *gleichschenkliges Dreieck,* bei dem zwei Seiten in diesem Verhältnis stehen Goldenes Dreieck.

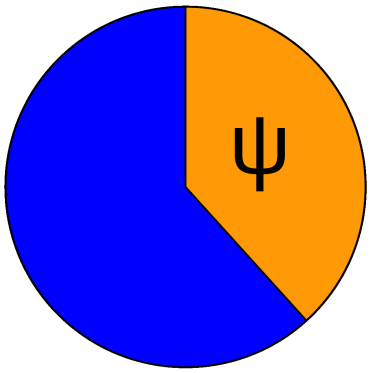
- zum Vergleich von Rechtecksproportionen siehe Abschnitt *Vergleich mit anderen Teilungsverhältnissen*
- ein Goldenes Dreieck ist Inhalt der Methode *äußere Teilung* in Abschnitt *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*

Goldener Winkel

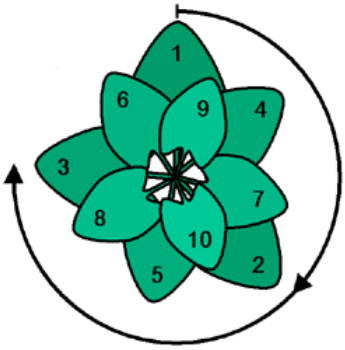
Den *Goldenen Winkel* Ψ erhält man, wenn man den Vollwinkel im Goldenen Schnitt teilt. Dies führt auf den überstumpfen Winkel $\frac{2\pi}{\Phi} \approx 3{,}88 \approx 222{,}5°$. Gewöhnlich wird aber seine Ergänzung zum Vollwinkel, $\Psi = 2\pi - \frac{2\pi}{\Phi} \approx 2{,}40 \approx 137{,}5°$ als Goldener Winkel bezeichnet. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass Drehungen um ±2π keine Rolle spielen und das Vorzeichen nur den Drehsinn des Winkel bezeichnet. Es ist nämlich

$$\Psi = \left|\tfrac{2\pi}{\Phi} - 2\pi\right|.$$

Durch wiederholte Drehung um den Goldenen Winkel entstehen immer wieder neue Positionen, etwa für die Blattansätze im Bild. Wie bei jeder irrationalen Zahl werden dabei nie exakte Überdeckungen entstehen. Weil die Goldene Zahl im unten beschriebenen Sinn die „irrationalste“ Zahl darstellt, wird dabei erreicht, dass die Überdeckung der Blätter, welche die Photosynthese behindert, in der Summe minimiert wird.

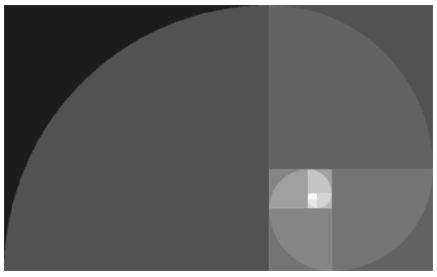


Der Goldene Winkel $\Psi \approx 137{,}5°$



Goldene Spirale

Die *Goldene Spirale* ist ein Sonderfall der logarithmischen Spirale. Diese Spirale lässt sich mittels rekursiver Teilung eines *Goldenen Rechtecks* in je ein Quadrat und ein weiteres, kleineres Goldenes Rechteck konstruieren (siehe nebenstehendes Bild). Sie wird oft durch eine Folge von Viertelkreisen approximiert. Ihr Radius ändert sich bei jeder 90°-Drehung um den Faktor Φ.[6]

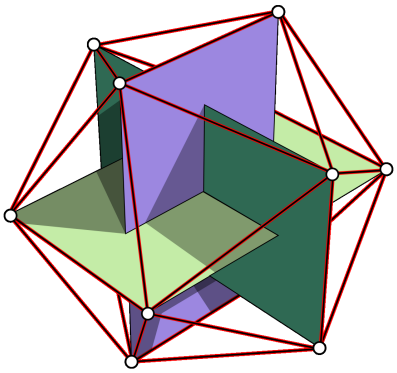


Goldene Spirale

Es gilt: $r(\varphi) = ae^{k\varphi}$ mit der Steigung $k = \pm\frac{\ln \Phi}{\alpha_\llcorner}$, wobei $\alpha_\llcorner$ hierbei der Zahlenwert für den rechten Winkel, also 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ ist, somit also $k = \frac{2\ln(\Phi)}{\pi}$ mit der Goldenen Zahl $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Mithin gilt für die Steigung: $|k| \approx 0{,}005346798/° \approx 0{,}30634896/\mathrm{rad}$.

Goldener Schnitt im Ikosaeder

Die zwölf Ecken des Ikosaeders bilden die Ecken von drei gleich großen, senkrecht aufeinanderstehenden Rechtecken mit gemeinsamem Mittelpunkt und mit den Seitenverhältnissen des Goldenen Schnittes. Die Anordnung der drei Rechtecke heißt auch Goldener-Schnitt-Stuhl.



Drei Goldene Rechtecke im Ikosaeder

Mathematische Eigenschaften

Herleitung des Zahlenwertes

Aus der oben angegebenen Definition

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

folgt mit $\Phi = \frac{a}{b}$ und $\frac{1}{\Phi} = \frac{b}{a}$

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0\,.$$

Multiplikation mit Φergibt die quadratische Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0\,.$$

Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033$$

und

$$\bar{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi} \approx -0{,}618\,033\,.$$

Da $\bar{\Phi}$negativ ist, ist Φdie gesuchte Goldene Zahl.

Die Goldene Zahlenfolge

Goldene Zahlenfolge für a_0=1

z	$a_z = \Phi^z \cdot a_0$	
4	≈ 6,854	$\Phi^4 = 3 * \Phi + 2$
3	≈ 4,236	$\Phi^3 = 2 * \Phi + 1$
2	≈ 2,618	$\Phi^2 = \Phi + 1$
1	≈ 1,618	Φ
0	= 1,000	$\Phi^0 = 1$
−1	≈ 0,618	$\Phi^{-1} = \Phi - 1$
−2	≈ 0,382	$\Phi^{-2} = -\Phi + 2$
−3	≈ 0,236	$\Phi^{-3} = 2 * \Phi - 3$
−4	≈ 0,146	$\Phi^{-4} = -3 * \Phi + 5$

Zu einer gegebenen Zahl a_0 lässt sich eine Folge $a_z := \Phi^z \cdot a_0$ für $z \in \mathbb{Z}$ konstruieren. Diese Folge hat die Eigenschaft, dass je drei aufeinanderfolgende Glieder (a_{z-1}, a_z, a_{z+1}) einen Goldenen Schnitt bilden, das heißt, es gilt

$$\frac{a_z}{a_{z-1}} = \frac{a_{z+1}}{a_z} \qquad \text{sowie} \qquad a_{z+1} = a_z + a_{z-1} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{Z}\,.$$

Diese Folge spielt in der Proportionslehre in Kunst und Architektur eine wichtige Rolle, weil sich zu einer gegebenen Länge a_0 weitere dazu harmonisch wirkende Längen erzeugen lassen. Dadurch lassen sich auch Objekte sehr unterschiedlicher Abmessungen, wie etwa Fenster- und Raumbreite, mittels des Goldenen Schnitts in Bezug setzen und ganze Serien untereinander harmonischer Maße erstellen.

Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen

Verhältnisse aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen

f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	**Abweichung zu Φ in %**
1	1	= 1,0000	−38
1	2	= 2,0000	+23
2	3	= 1,5000	−7,3
3	5	≈ 1,6667	+3,0
5	8	= 1,6000	−1,1
8	13	= 1,6250	+0,43
13	21	≈ 1,6154	−0,16
21	34	≈ 1,6190	+0,063
34	55	≈ 1,6176	−0,024
55	89	≈ 1,6182	+0,0091
89	144	≈ 1,6180	−0,0035
144	233	≈ 1,6181	+0,0013

In einem engen Zusammenhang zum Goldenen Schnitt steht die unendliche Zahlenfolge der Fibonacci-Zahlen (siehe unten die Abschnitte Mittelalter und Renaissance):

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Die jeweils nächste Zahl in dieser Folge erhält man als Summe der beiden vorangehenden. Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Zahlen der Fibonacci-Folge strebt gegen den Goldenen Schnitt (siehe Tabelle). Das rekursive Bildungsgesetz $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ bedeutet nämlich

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}.$$

Sofern dieses Verhältnis gegen einen Grenzwert Φ konvergiert, muss für diesen gelten

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Diese Beziehung definiert aber gerade den Goldenen Schnitt, wie der Vergleich mit der ersten Gleichung des vorangehenden Abschnitts zeigt. Diese Argumentation gilt auch für verallgemeinerte Fibonacci-Folgen mit zwei beliebigen Anfangsgliedern.

Die Glieder der Fibonacci-Folge f_n lassen sich für alle $n \in \mathbb{N}$ über die Formel von Binet berechnen:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \bar{\Phi}^n).$$

Diese Formel liefert die richtigen Anfangswerte $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ und erfüllt die rekursive Gleichung $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle n.[7]

Approximationseigenschaften der Goldenen Zahl

Wie weiter oben schon angegeben, ist die Goldene Zahl Φ eine irrationale Zahl, das heißt sie lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. Sie wird manchmal die „irrationalste“ aller Zahlen genannt, weil sie sich (in einem speziellen zahlentheoretischen Sinn) besonders schlecht durch rationale Zahlen approximieren lässt (Diophantische Approximation). Dies soll im Folgenden durch einen Vergleich mit der ebenfalls irrationalen Kreiszahl π illustriert werden. Letztere ist wesentlich besser approximierbar als Φ, zum Beispiel lässt π sich durch den Bruch $\frac{22}{7}$ mit einer Abweichung von nur zirka 0,00126 approximieren. Einen derartig geringen Fehler würde man im Allgemeinen erst bei einem sehr viel größeren Nenner erwarten.[8]

Die Goldene Zahl lässt sich direkt aus der Forderung nach möglichst schlechter Approximierbarkeit durch rationale Zahlen konstruieren. Um das zu verstehen, betrachte man das folgende Verfahren zur Approximation beliebiger Zahlen durch einen Bruch am Beispiel der Zahl π. Wir zerlegen diese Zahl zunächst in ihren ganzzahligen Anteil und einen Rest, der kleiner als 1 ist: $\pi = 3 + \mathrm{Rest}$. Der Kehrwert dieses Restes ist eine Zahl, die größer als 1 ist. Sie lässt sich daher wiederum zerlegen in einen ganzzahligen Anteil und einen Rest kleiner 1: $\pi = 3 + \frac{1}{7+\mathrm{Rest}}$. Verfährt man mit diesem Rest und allen folgenden ebenso, dann erhält man die so genannte unendliche Kettenbruchentwicklung der Zahl π

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Wird diese Kettenbruchentwicklung nach endlich vielen Schritten abgebrochen, dann erhält man für π die bekannten Näherungen 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, …, die rasch gegen π streben. Für jeden einzelnen dieser Brüche gilt, dass es keinen Bruch mit einem kleineren Nenner gibt, der π besser approximiert. Dies gilt ganz allgemein:

> Wenn man die Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Zahl x an irgendeiner Stelle abbricht, so erhält man eine rationale Zahl p/q, die x optimal approximiert unter allen rationalen Zahlen mit Nenner $\leq q$.[9]

Im obigen Kettenbruch erscheint vor jedem Pluszeichen eine ganze Zahl. Je größer diese Zahl ist, umso kleiner ist der Bruch, in dessen Nenner sie steht, und umso kleiner ist daher auch der Fehler, der entsteht, wenn der unendliche Kettenbruch vor diesem Bruch abgebrochen wird. Die größte Zahl im obigen Abschnitt des Kettenbruchs ist die 15. Das ist der Grund, warum $\frac{22}{7}$ eine derart gute Approximation für π darstellt.

In Umkehrung dieser Argumentation folgt nun, dass die Approximation besonders schlecht ist, wenn die Zahl vor dem Pluszeichen besonders klein ist. Die kleinste zulässige Zahl dort ist aber die 1. Der Kettenbruch, der ausschließlich Einsen enthält, lässt sich daher besonders schlecht durch rationale Zahlen approximieren und ist in diesem Sinn die „irrationalste aller Zahlen“.

Für die Goldene Zahl gilt nun aber $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ (siehe oben), woraus sich durch wiederholte Anwendung ergibt

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \cdots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{\Phi}}}}}.$$

Da die Kettenbruchentwicklung der Goldenen Zahl Φ also nur Einsen enthält, gehört sie zu den Zahlen, die besonders schlecht rational approximierbar sind. Bricht man ihre Kettenbruchentwicklung an irgendeiner Stelle ab, so erhält man stets einen Bruch aus zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen.[10]

Eine weitere kuriose Bezeichnung ist die folgende: In der Theorie der dynamischen Systeme bezeichnet man Zahlen, deren unendliche Kettenbruchdarstellung ab irgendeiner Stelle nur noch Einsen enthält, als „noble Zahlen“. Da die Goldene Zahl **nur** Einsen in ihrem Kettenbruch hat, kann man sie scherzhaft als „nobelste Zahl“ bezeichnen.

Weitere mathematische Eigenschaften

- Aus $\Phi^2 = 1 + \Phi$ lässt sich folgende unendliche Kettenwurzel herleiten:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}.$$

- Das Quadrat $\Phi^2 = \Phi + 1$ und jede höhere ganzzahlige Potenz von Φ lassen sich als Summe aus einem ganzzahligen Vielfachen von Φ und einem ganzzahligen Vielfachen von 1 darstellen. Auf dieser Eigenschaft beruht die fundamentale Bedeutung des Goldenen Schnitts für quasiperiodische Gitter (*siehe* Quasikristall).
- Genauer gilt $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = f_{n-1} + f_n \cdot \Phi = f_{n+1} + f_n \cdot \frac{1}{\Phi}$ (wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist).
- Aus der Trigonometrie erhält man unter anderem

$$\Phi = 2\cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\tfrac{3\pi}{10}\right)$$

und

$$\frac{1}{\Phi} = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{10}\right) = 2\cos\left(\tfrac{2\pi}{5}\right)\ .$$

$\frac{\pi}{5}$ ist der Spitzenwinkels und $\frac{3\pi}{10}$ die Hälfte des stumpfen Außenwinkels des Pentagramms. Gelegentlich wird die Rolle des Goldenen Schnitts für das Fünfeck als vergleichbar bedeutend bezeichnet wie die der Kreiszahl π für den Kreis.

- Der Goldene Schnitt lässt sich auch mit Hilfe der Eulerschen Zahl und der hyperbolischen Areasinus-Funktion ausdrücken:

$$\Phi^{\pm 1} = e^{\operatorname{arsinh}\left(\pm\frac{1}{2}\right)}\ .$$

- Einsetzen von $q = \frac{1}{\Phi}$ in die für $|q| < 1$ gültige geometrische Reihenformel $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ ergibt:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^k}\,.$$

Verallgemeinerung des *Goldenen Schnittes*

Geometrisches Mittel

Wird die Strecke AB in ihrer Länge $[AB]$ als reelle Zahl a interpretiert, und die Teilung durch den *Goldenen Schnitt* im Punkt T in die beiden Teilstrecken AT und BT als Zerlegung dieser Zahl a in zwei Summanden x und $a - x$, so ist x das geometrische Mittel der Zahlen a und $a - x$. Das folgt aus der allgemeinen Definition des geometrischen Mittels $\bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, hier: $x = \sqrt[2]{a(a-x)}$. Des weiteren folgt daraus unmittelbar, dass a wiederum das geometrische Mittel von x und $a + x$ ist.[11]
Für jedes beliebige reelle a lässt sich daher sowohl eine mathematische Folge aufsteigend wie absteigend angeben. Die aufsteigende, wie auch die absteigende Folge ist jeweils rekursiv definiert.

Für die aufsteigende Folge gilt: $a_{i+1} = a_i + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})a_i$ mit dem Anfangspunkt $a_0 = a$.

Für die absteigende Folge gilt: $a_{i+1} = a_i - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})a_i$ mit dem Anfangspunkt $a_0 = a$.

Stetige Teilung

Die geometrische Verallgemeinerung des *Goldenen Schnittes* durch seine mehrfache Anwendung ist die *Stetige Teilung* einer Strecke $\overline{AB}$. Dabei wird die Strecke $\overline{AB}$ zunächst in eine kleinere Strecke $\overline{AA'}$ und eine größere $\overline{A'B}$ zerlegt. Die Strecke $\overline{A'B}$ (d.h. der größere der entstandenen Streckenabschnitte) wird nunmehr erneut einem *Goldenen Schnitt* unterzogen, wobei $\overline{A''B}$ als (neuer) größerer Streckenabschnitt und $\overline{A'A''}$ als kleinerer verbleiben. Dieser Schritt kann nun unendlich oft wiederholt werden, da auf Grund der mathematischen Eigenschaften des *Goldenen Schnittes* trotz der fortschreitenden Teilung es keinen Punkt $A^{(n)}$ geben wird, der mit dem ursprünglichen Punkt A zusammenfällt.
Dieses allgemeingültige Vorgehen kann aber auch dadurch erreicht werden, dass im Punkt B nach der Konstruktion von A' die Strecke $\overline{AA'}$ abgetragen wird: Der auf diese Weise entstehende Punkt A'' ist der gleiche, wie der soeben in der (allgemeinen) Zerlegung beschriebene Punkt A''.
Diese Schrittfolge bezeichnet man als *Stetige Teilung* einer Strecke $\overline{AB}$.[1]

Analytisch ist damit die *Stetige Teilung* als Verallgemeinerung des *Goldenen Schnittes* ein Beispiel von Selbstähnlichkeit: Interpretiert man wiederum die entstandenen Längen der Strecken als reelle Zahlen, so gilt: Subtrahiert man die kürzere der beiden Strecken von der längeren, so erhält man eine noch kürzere Strecke $a - b$, zu der die mittlere Strecke b wiederum im Verhältnis des Goldenen Schnittes steht, also

$$\frac{b}{a-b} = \frac{a}{b}.$$

Diese Aussage ist analytisch wiederum identisch zu der absteigenden geometrischen Folge des vorangegangenen Abschnittes. Für die Verlängerung einer gegebenen Strecke gilt demzufolge die gleiche Aussage, sie führt zur aufsteigenden geometrischen Folge.

Aus dieser Aussage heraus gilt aber auch: Ein Rechteck mit den Seiten a und b entspricht genau dann dem *Goldenen Schnitt*, wenn das auch für das Rechteck mit den Seiten $a + b$ und a der Fall ist. Ein *Goldenes Rechteck* lässt sich daher stets in ein kleineres *Goldenes Rechteck* und ein Quadrat zerlegen. Diese Verallgemeinerung ist wiederum Grundlage für die Konstruktion der (unendlichen) *Goldenen Spirale*, wie oben beschrieben.

Verfahren des Goldenen Schnittes

Das *Verfahren des Goldenen Schnittes* (auch: *Methode des Goldenen Schnittes*, *Suchverfahren Goldener Schnitt*, seltener auch *Goldenes Verfahren*) ist ein Verfahren der mathematischen nichtlinearen Optimierung, genauer berechnet es algorithmisch eine numerische Näherung für eine Extremstelle (Minimum oder Maximum) einer reellen Funktion einer Variablen in einem Suchintervall $[a, b]$. Es basiert auf der analytischen Anwendung der ursprünglich geometrisch definierten *Stetigen Teilung*. Analog der sequentiellen dichotomen Suche, wie sie das Intervallhalbierungsverfahren als spezieller Anwendungsfall darstellt, wird jedoch nicht das Suchintervall bei jedem Schritt halbiert, sondern nach dem Prinzip des *Goldenen Schnittes* verkleinert.

Der verwendete Parameter τ (*tau*) hat dabei nicht, wie bei „dichotomen Verfahren“, den Wert $\frac{1}{2}$, sondern man wählt $\tau = \Phi - 1$, sodass sich zwei Punkte $x = b - \tau(b - a)$ und $x' = a + \tau(b - a)$ für das Optimierungsverfahren ergeben, die das Suchintervall im *Goldenen Schnitt* teilen.[12]
Wird angenommen, dass jeder Punkt in jedem Intervall mit gleicher Wahrscheinlichkeit Extrempunkt sein kann, führt dies bei Unbestimmtheitsintervallen dazu, dass das *Verfahren des Goldenen Schnittes* z. B. um 14 % effektiver ist als die Intervallhalbierungsmethode. Im Vergleich zu diesem und weiteren sequentiellen Verfahren ist es − mathematisch gesehen − das für allgemeine Funktionen effektivste Verfahren; nur im Fall differenzierbarer Funktionen ist es der direkten mathematischen Lösung unterlegen.[13]

Dass sich dieses Verfahren in der manuellen Rechnung nicht durchgesetzt hat, liegt vor allem an den notwendigen Wurzelberechnungen für die einzelnen Zwischenschritte. Für computergestützte Berechnungen sind heute andere numerische Verfahren leistungsfähiger, so dass es auch in diesem Bereich sich nicht durchsetzte.

Geschichte

Der *Goldene Schnitt* ist ein Begriff, der erst ab der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts populär wurde, obwohl die mathematischen Prinzipien schon seit der Antike bekannt waren. Auch der Begriff *Goldene Zahl* stammt aus dieser Zeit, noch 1819 wird dieser Begriff mit dem Meton-Zyklus in einem der Griechischen Kalendersysteme in Verbindung gebracht.[14]

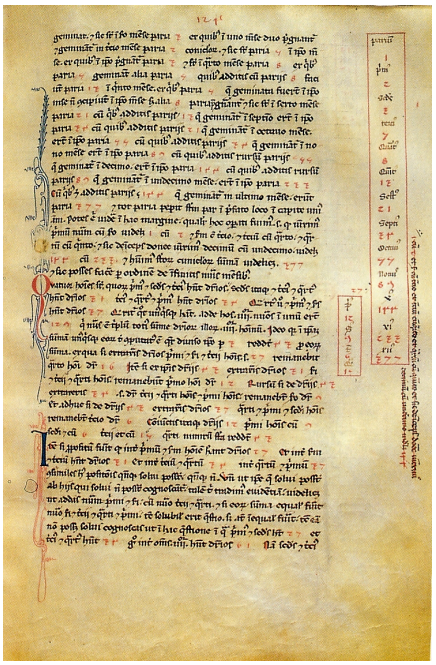
Antike

Die erste erhalten gebliebene genaue Beschreibung des *Goldenen Schnittes* findet sich im zweiten Buch der Elemente des Euklid (um 300 v. Chr.), der darauf über seine Untersuchungen an den platonischen Körpern und dem Fünfeck beziehungsweise dem Pentagramm stieß. Seine Bezeichnung für dieses Teilungsverhältnis wurde später ins Lateinische als „proportio habens medium et duo extrema“ übersetzt, was heute als „Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“ bezeichnet wird.[15][16][17]

Als historisch gesichert kann heute gelten, dass der *Goldene Schnitt* bereits vor Euklid bekannt war. Umstritten ist, ob die Entdeckung auf Hippasos von Metapont (spätes 6. Jahrhundert v. Chr.) oder auf Eudoxos von Knidos (um 370 v. Chr.) zurückgeht.[18]

Mittelalter

In seinem Rechenbuch *Liber abbaci* (nicht erhaltene Erstfassung 1202, erhaltene 2. Fassung nicht vor 1220), einem umfangreichen arithmetischen und algebraischen Lehrwerk über das Rechnen mit den indo-arabischen Ziffern, kommt der italienische Mathematiker Leonardo da Pisa, genannt „Fibonacci“, kurz auch auf die später nach ihm benannten Fibonacci-Folge zu sprechen, und zwar im Zusammenhang mit der sogenannten Kaninchen-Aufgabe, in der zu errechnen ist, wie viele Kaninchenpaare bei einer Fortpflanzungsrate von einem Paar Jungkaninchen pro Elternpaar und Monat nach Ablauf eines Jahres insgesamt vorhanden sind, wenn ein erstes Paar bereits im ersten Monat und dessen Nachwuchs jeweils ab seinem zweiten Lebensmonat Junge wirft.[19] Leonardo führt die Zahlenfolge für jeden Monat vor (2, 3, 5, 8 ... bis 377) und weist darauf hin, dass sich jedes Glied der Reihe (ab dem dritten) durch Summierung der beiden vorhergehenden Reihenglieder errechnen lässt. Eine weitere Beschäftigung mit dieser Folge findet sich bei ihm nicht, d h. der Zusammenhang zum *Goldenen Schnitt* wird von ihm nicht dargestellt.

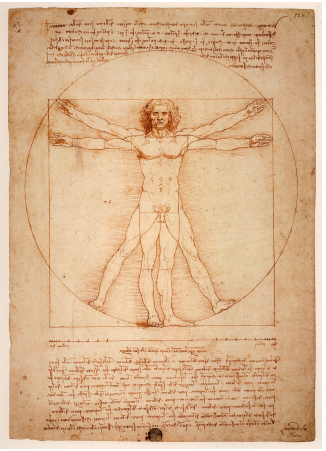


Liber abbaci, MS Biblioteca Nazionale di Firenze, Codice Magliabechiano cs cI 2616, fol. 124r: Fibonacci-Zahlen am Rand der „Kaninchenaufgabe“

Dass ihm allerdings der (erst später so genannte) *Goldene Schnitt* bekannt und in der Tradition Euklids ein Begriff war, zeigt sich gegen Ende seines Werks bei einer algebraischen Aufgabe, in der es darum geht (in moderner Formulierung wiedergegeben)[20] *a* und *b* zu finden mit $10 = a + b$ und $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \sqrt{5}$. Hierzu weist Leonardo darauf hin, dass im Fall von $a > b$ die Proportion $10 : a = a : b$ gilt, 10 also von *a* und *b* im Verhältnis des *Goldenen Schnittes* (ohne diesen Begriff zu gebrauchen) geteilt wird ("et scis, secundum hanc diuisionem, 10 diuisa esse media et extrema porportione; quia est sicut 10 ad maiorem partem, ita maior pars ad minorem").[21]

Renaissance

Einen Zusammenhang zwischen *Fibonacci-Folge* und *Goldenem Schnitt* stellte Leonardo jedoch noch nicht her: Die Entdeckung, dass sich bei Teilung eines Gliedes der Fibonacci-Folge durch das vorhergehende Reihenglied als Näherungswert Φ ergibt, wurde lange Zeit Johannes Kepler zugeschrieben, konnte jedoch in jüngerer Zeit auch schon in einer handschriftlichen Anmerkung nachgewiesen werden, mit der ein mutmaßlich aus Italien stammender Leser in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts Euklids Theorem II.11 in der Euklid-Ausgabe Paciolis von 1509 kommentierte:[22]



Der vitruvianische Mensch, Leonardo da Vinci, 1492, Proportionsstudie nach Vitruv

> *Sit linea* ab *233 pedum, divisa ut docet 11 huius in duo inaequalia in puncto* h *et sit* bh *portio eius maior 144 et* ha *portio eius minor 89. ducatur* ab *in* ha *et perveniunt 20737 et* bh *in se et perveniunt 20736. et sic cognosces quod in mutationibus non est laborandum quid impossibile est numerum ita dividi ut ista 11 proponit. similiter accidit si linea 13 pedum dividatur in lineam 8 pedum, et lineam 5.* [„Eine Gerade *ab* von 233 Fuß sei so, so wie es Theorem 11 hier vorführt, an einem Punkt *h* in zwei

> ungleiche Teile geteilt, und dabei sei *bh* sein größerer Teil mit 144 und *ha* sein kleinerer Teil mit 89. *ab* sei multipliziert mit *ha*, und es ergeben sich 20737, und bh multipliziert mit sich selbst, so ergeben sich 20736. Und daran magst du erkennen, dass man sich nicht mit Ersetzungen abzumühen braucht um zu zeigen, dass es unmöglich ist, die Zahl so zu teilen wie es hier Theorem 11 vorführt. Das gleiche ergibt sich, wenn eine Gerade von 13 Fuß in eine Gerade von 8 und eine von 5 Fuß geteilt wird.“]

Auch der Herausgeber dieser Euklid-Ausgabe, der Franziskanermönch Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro (1445–1514), der an der Universität von Perugia Mathematik lehrte, hatte sich intensiv mit dem *Goldenen Schnitt* befasst. Er nannte diese Streckenteilung *Göttliche Teilung*, was sich auf Platons Identifizierung der Schöpfung mit den fünf platonischen Körpern bezog, zu deren Konstruktion der *Goldene Schnitt* ein wichtiges Hilfsmittel darstellt. Sein gleichnamiges Werk „De Divina Proportione“ von 1509 besteht aus drei unabhängigen Büchern. Bei dem ersten handelt es sich um eine rein mathematische Abhandlung, die jedoch keinerlei Bezug zur Kunst und Architektur herstellt. Das zweite ist ein kurzer Traktat über die Schriften des Römers Vitruv aus dem 1. Jahrhundert v. Chr. zur Architektur, in denen Vitruv die Proportionen des menschlichen Körpers als Vorlage für Architektur darstellt. Dieses Buch enthält eine Studie von Leonardo da Vinci (1452–1519) über den vitruvianischen Menschen. Das Verhältnis von Seite des den Menschen umgebenden Quadrats zu Radius des umgebenden Kreises – nicht das Verhältnis der Proportionen des Menschen selbst – in diesem berühmten Bild entspricht mit einer Abweichung von 1,7 % dem *Goldenen Schnitt*, der jedoch im zugehörigen Buch gar nicht erwähnt wird. Darüber hinaus würde man diese Abweichung bei einem konstruktiven Verfahren nicht erwarten.

Im Oktober 1597 stellte Johannes Kepler in einem Brief an seinen früheren Tübinger Professor Michael Maestlin die Frage, warum es nur eine einzige mögliche Lösung gebe für die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, bei dem das Verhältnis der kürzeren zur längeren Seite dem der längeren zur Hypotenuse entspricht. Auf das Original dieses Briefes notierte Maestlin eine Berechnung, die die Hypotenuse einmal mit 10 und einmal mit 10.000.000, und für den letzteren Fall dann die kürzeste Seite mit 7.861.514 und die längere Seite mit 6.180.340 beziffert. Das entspricht einer bis auf die sechste Nachkommastelle genauen (und bis zur fünften korrekten) Angabe des *Goldenen Schnittes* und ist nach den älteren sexagesimalen Berechnungen der Antike die erste bekannte dezimale Angabe dieser Art.[23]

19. und 20. Jahrhundert

In Abhandlungen verschiedener Autoren im 19. Jahrhundert, insbesondere von dem Philosophen Adolf Zeising[24], wurden die beiden Schriften von Pacioli und da Vinci zu der These kombiniert, Pacioli habe in der „De Divina Proportione” in Zusammenarbeit mit Leonardo da Vinci einen Zusammenhang zwischen Kunst und *Goldenem Schnitt* hergestellt und damit seine Wiederentdeckung für die Malerei der Renaissance begründet. Zeising war überdies von der Existenz eines Naturgesetzes der Ästhetik überzeugt, dessen Basis der *Goldene Schnitt* sein müsse. Er suchte und fand den *Goldenen Schnitt* überall. Seine Schriften verbreiteten sich rasch und begründeten eine wahre Euphorie bezüglich des *Goldenen Schnittes*. Andererseits zeigt eine Untersuchung der Literatur, dass vor Zeising niemand in den Werken der Antike oder Renaissance den *Goldenen Schnitt* zu erkennen glaubte. Entsprechende Funde sind daher heute unter Kunsthistorikern eher umstritten, wie z. B. *Neveux* 1995 nachwies.[25]

Eine der ersten gesicherten Verwendungen der Bezeichnung *Goldener Schnitt* wurde 1835 von Martin Ohm (1792–1872; Bruder von Georg Simon Ohm) in einem Lehrbuch der Mathematik verwendet.[15][26] Auch die Bezeichnung *sectio aurea* entstand erst in dieser Zeit.

Gustav Theodor Fechner, ein Begründer der experimentellen Psychologie, stellte 1876 bei Untersuchungen mit Versuchspersonen anhand von Rechtecken in der Tat eine Präferenz für den *Goldenen Schnitt* fest.[27] Die Ergebnisse bei der Streckenteilung und bei Ellipsen fielen jedoch anders aus. Neuzeitliche Untersuchungen zeigen, dass das Ergebnis solcher Experimente stark vom Kontext der Darbietung abhängt. Fechner fand ferner bei Vermessungen von Bildern in verschiedenen Museen Europas, dass die Seitenverhältnisse im Hochformat im Mittel etwa 4:5 und im Querformat etwa 4:3 betragen und sich damit deutlich vom Goldenen Schnitt unterscheiden.[28][29]

Der rumänische Diplomat Matila Ghyka verband in seinen Schriften *Esthétique des Proportions* (1927) und *Le nombre d'or* (1931) den religiösen Aspekt von Pacioli mit dem ästhetischen von Zeising. Er interpretierte den *Goldenen Schnitt* als fundamentales Geheimnis des Universums und führte dazu vor allem Beispiele in der Natur an.

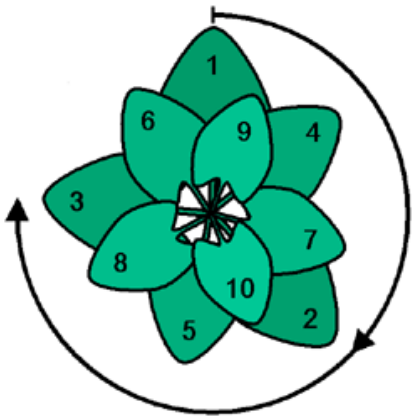
Ende des 20. Jahrhunderts suchte die Kunsthistorikerin Marguerite Neveux mit röntgenanalytischen Verfahren unter der Farbe von Originalgemälden, die angeblich den *Goldenen Schnitt* enthalten würden, vergeblich nach entsprechenden Markierungen oder Konstruktionsspuren.[25][30]

Vorkommen in der Natur

Biologie

Das spektakulärste Beispiel für Verhältnisse des *Goldenen Schnittes* in der Natur findet sich bei der Anordnung von Blättern (Phyllotaxis) und in Blütenständen mancher Pflanzen.[31] Bei diesen Pflanzen teilt der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern den Vollkreis von 360° im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*, wenn man die beiden Blattwurzeln durch eine Parallelverschiebung eines der Blätter entlang der Pflanzenachse zur Deckung bringt. Es handelt sich dabei um den *Goldenen Winkel* von etwa 137,5°.

Die daraus entstehenden Strukturen werden auch als selbstähnlich bezeichnet: Auf diese Weise findet sich ein Muster einer tieferen Strukturebene in höheren Ebenen wieder. Beispiele sind die Sonnenblume[32], Kohlarten, Kiefernnadeln an jungen Ästen, Zapfen[33], Agaven, viele Palmen- und Yuccaarten und die Blütenblätter der Rose, um nur einige zu nennen.



Anordnung von Blättern im Abstand des Goldenen Winkels von oben betrachtet. Das Sonnenlicht wird optimal genutzt.

Ursache ist das Bestreben dieser Pflanzen, ihre Blätter auf Abstand zu halten. Es wird vermutet, dass sie dazu an jeder Blattwurzel einen besonderen Wachstumshemmer (Inhibitor) erzeugen, der im Pflanzenstamm – vor allem nach oben, in geringerem Umfang aber auch in seitlicher Richtung – diffundiert. Dabei bilden sich in verschiedene Richtungen bestimmte Konzentrationsgefälle aus. Das nächste Blatt entwickelt sich an einer Stelle des Umfangs, wo die Konzentration minimal ist. Dabei stellt sich ein bestimmter Winkel zum Vorgänger ein. Würde dieser Winkel den Vollkreis im Verhältnis einer rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ teilen, dann würde dieses Blatt genau in die gleiche Richtung wachsen wie dasjenige *n* Blätter zuvor. Der Beitrag dieses Blattes zur Konzentration des Inhibitors ist aber an dieser Stelle gerade maximal. Daher stellt sich ein Winkel mit einem Verhältnis ein, das alle rationalen Zahlen meidet. Die Zahl ist nun aber gerade die Goldene Zahl (siehe oben). Da bisher kein solcher Inhibitor isoliert werden konnte, werden auch andere Hypothesen diskutiert, wie beispielsweise die Steuerung dieser Vorgänge in analoger Weise durch Konzentrationsverteilungen von Nährstoffen.

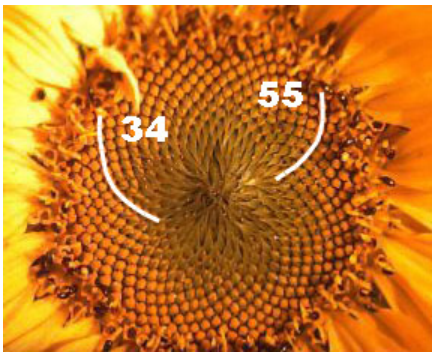
Der Nutzen für die Pflanze könnte darin bestehen, dass auf diese Weise von oben einfallendes Sonnenlicht (bzw. Wasser und Luft) optimal genutzt wird[34], eine Vermutung, die bereits Leonardo da Vinci äußerte, oder auch im effizienteren Transport der durch Photosynthese entstandenen Kohlenhydrate im Phloemteil der Leitbündel nach unten. Die Wurzeln von Pflanzen weisen den Goldenen Winkel weniger deutlich auf. Bei anderen Pflanzen wiederum treten Blattspiralen mit anderen Stellungswinkeln zutage. So wird bei manchen Kakteenarten ein Winkel von 99,5° beobachtet, der mit der Variante der Fibonacci-Folge 1, 3, 4, 7, 11, … korrespondiert. In Computersimulationen des Pflanzenwachstums lassen sich diese verschiedenen Verhaltensweisen durch geeignete Wahl der Diffusionskoeffizienten des Inhibitors provozieren.

Bei vielen nach dem *Goldenen Schnitt* organisierten Pflanzen bilden sich in diesem Zusammenhang so genannte Fibonacci-Spiralen aus. Spiralen dieser Art sind besonders gut zu erkennen, wenn der Blattabstand im Vergleich zum Umfang des Pflanzenstammes besonders klein ist. Sie werden nicht von aufeinander folgenden Blättern gebildet, sondern von solchen im Abstand *n*, wobei *n* eine Fibonacci-Zahl ist. Solche Blätter befinden sich in enger Nachbarschaft, denn das *n*-fache des Goldenen Winkels Ψ ist ungefähr ein Vielfaches von 360° wegen

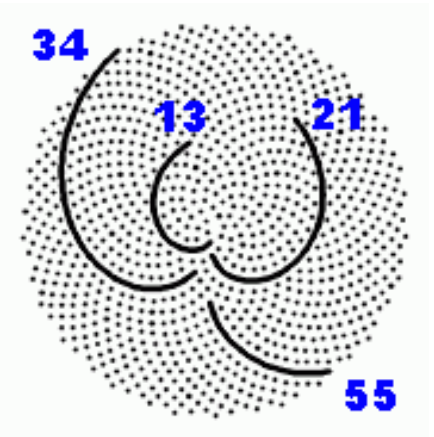
Fichtenzapfen mit 5, 8 und 13 Fibonacci-Spiralen

$$n\Psi = n\frac{360^\circ}{\Phi} \approx n\frac{m}{n}360^\circ = m\,360^\circ\,,$$

wobei *m* die nächstkleinere Fibonacci-Zahl zu *n* ist. Da jedes der Blätter zwischen diesen beiden zu einer anderen Spirale gehört, sind *n* Spiralen zu sehen. Ist $\frac{n}{m}$ größer als Φ, so ist das Verhältnis der beiden nächsten Fibonacci-Zahlen kleiner und umgekehrt. Daher sind in beide Richtungen Spiralen zu aufeinander folgenden Fibonaccizahlen zu sehen. Der Drehsinn der beiden Spiralentypen ist dem Zufall überlassen, sodass beide Möglichkeiten gleich häufig auftreten.



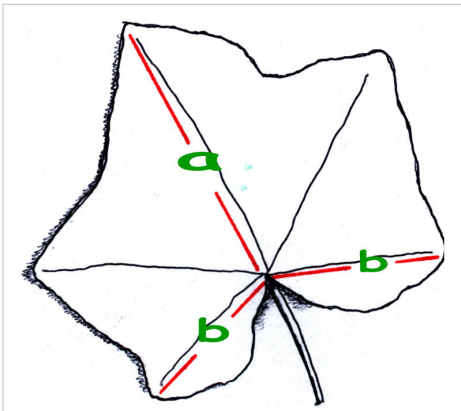
Sonnenblume mit 34 und 55 Fibonacci-Spiralen



Berechneter Blütenstand mit 1000 Samen im Goldenen Winkel – Es stellen sich 13, 21, 34 und 55 Fibonacci-Spiralen ein.

Besonders beeindruckend sind Fibonacci-Spiralen (die damit wiederum dem *Goldenen Schnitt* zugeordnet sind) in Blütenständen, wie beispielsweise bei Sonnenblumen.[35] Pflanzenarchitektonisch entsprechen den einzelnen Samen Blätter, wobei jedes einzelne einem eigenen Kreis um den Mittelpunkt des Blütenstandes zugeordnet werden kann, so als hätte man einen Pflanzenstamm mit seinen Blättern wie ein Teleskop zusammengeschoben. Wachstumstechnisch aufeinander folgende Samen liegen daher räumlich weit auseinander, während direkte Nachbarn wieder einen Abstand entsprechend einer Fibonacci-Zahl haben. Im äußeren Bereich von Sonnenblumen zählt man 34 und 55 Spiralen, bei größeren Exemplaren 55 und 89 oder sogar 89 und 144. Die Abweichung vom mathematischen Goldenen Winkel, die in diesem Fall nicht überschritten wird, beträgt weniger als 0,01 %.

Der *Goldene Schnitt* ist außerdem in radiärsymmetrischen fünfzähligen Blüten erkennbar wie beispielsweise bei der Glockenblume, der Akelei und der (wilden) Hecken-Rose. Der Abstand der Spitzen von Blütenblättern nächster Nachbarn zu dem der übernächsten steht wie beim regelmäßigen Fünfeck üblich in seinem Verhältnis. Das betrifft ebenso Seesterne und andere Tiere mit fünfzähliger Symmetrie.[36]



Goldener Schnitt im Efeublatt

Darüber hinaus wird der *Goldene Schnitt* auch im Verhältnis der Längen aufeinander folgender Stängelabschnitte mancher Pflanzen vermutet wie beispielsweise bei der Pappel. Auch im Efeublatt stehen die Blattachsen *a* und *b* (siehe Abbildung) ungefähr im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*. Diese Beispiele sind jedoch umstritten.

Noch im 19. Jahrhundert war die Ansicht weit verbreitet, dass der *Goldene Schnitt* ein göttliches Naturgesetz sei und in vielfacher Weise auch in den Proportionen des menschlichen Körpers realisiert wäre. So nahm Adolf Zeising in seinem Buch über die Proportionen des menschlichen Körpers[24] an, dass der Nabel die Körpergröße im Verhältnis des *Goldenen Schnittes* teile, und der untere Abschnitt werde durch das Knie wiederum so geteilt. Ferner scheinen die Verhältnisse benachbarter Teile der Gliedmaßen wie beispielsweise bei Ober- und Unterarm sowie bei den Fingerknochen ungefähr in diesem Verhältnis zu stehen. Eine genaue Überprüfung ergibt jedoch Streuungen der Verhältnisse im 20-%-Bereich. Oft enthält auch die Definition, wie beispielsweise die Länge eines Körperteils exakt zu bestimmen sei, eine gewisse Portion Willkür. Ferner fehlt dieser These bis heute eine wissenschaftliche Grundlage. Es dominiert daher weitgehend die Ansicht, dass diese Beobachtungen lediglich die Folge gezielter Selektion von benachbarten Paaren aus einer Menge von beliebigen Größen sind.[37]

Bahnresonanzen

Seit langem ist bekannt, dass die Umlaufzeiten mancher Planeten und Monde in Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen wie beispielsweise Jupiter und Saturn mit 2:5 oder die Jupitermonde Io, Ganymed und Europa mit 1:2:4. Derartige Bahnresonanzen stabilisieren die Bahnen der Himmelskörper langfristig gegen kleinere Störungen. Erst 1964 wurde entdeckt, dass auch hinreichend irrationale Verhältnisse, wie sie beispielsweise im Fall $1:\Phi$ vorliegen würden, stabilisierend wirken können. Derartige Bahnen werden KAM-Bahnen (siehe Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorem) genannt, wobei die drei Buchstaben für die Namen der Entdecker Andrei Kolmogorow, V. I. Arnold und Jürgen Moser stehen.[38][39]

Kristallstrukturen

Der *Goldene Schnitt* tritt auch bei den Quasikristallen der Festkörperphysik in Erscheinung, die 1984 von Dan Shechtman und seinen Kollegen entdeckt wurden.[40] Dabei handelt es sich um Strukturen mit fünfzähliger Symmetrie, aus denen sich aber, wie bereits Kepler erkannte, keine streng periodischen Kristallgitter aufbauen lassen, wie dies bei Kristallen üblich ist. Entsprechend groß war die Überraschung, als man bei Röntgenstrukturanalysen Beugungsbilder mit fünfzähliger Symmetrie fand. Diese Quasikristalle bestehen strukturell aus zwei verschiedenen rhomboedrischen Grundbausteinen, mit denen man den Raum zwar lückenlos, jedoch ohne globale Periodizität füllen kann (Penrose-Parkettierung). Beide Rhomboeder setzten sich aus den gleichen rautenförmigen Seitenflächen zusammen, die jedoch unterschiedlich orientiert sind. Die Form dieser Rauten lässt sich nun dadurch definieren, dass ihre Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen.[41] Für die Entdeckung von Quasikristallen wurde Schechtman 2011 der Nobelpreis für Chemie verliehen.[42]

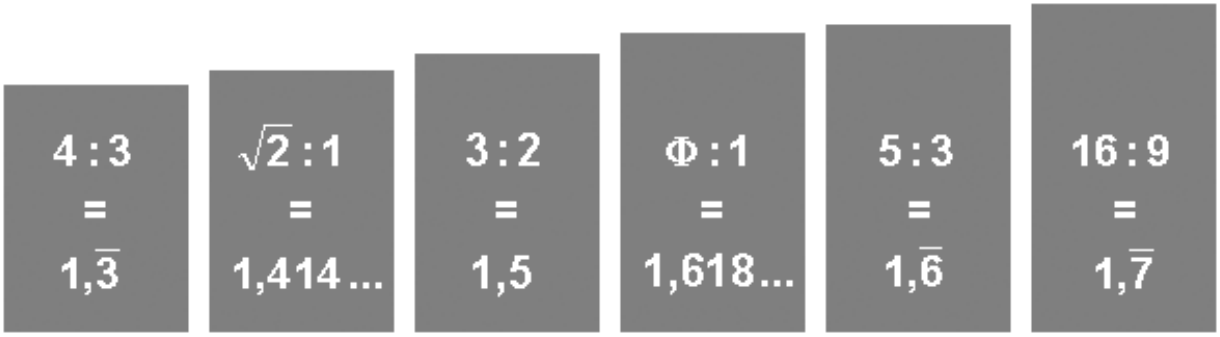
Anwendungen des Goldenen Schnitts

Papier- und Bildformate

Im Buchdruck wurde früher gelegentlich die Nutzfläche einer Seite, der so genannte Satzspiegel, so positioniert, dass das Verhältnis von Bundsteg zu Kopfsteg zu Außensteg zu Fußsteg sich wie 2:3:5:8 verhielt. Diese Wahl von Fibonacci-Zahlen approximiert den Goldenen Schnitt.

Vergleich mit anderen prominenten Seitenverhältnissen

Auch für den mathematischen Laien erkennbar wird die besondere Herausgehobenheit des *Goldenen Schnitts*: Die folgende Abbildung zeigt im Vergleich verschiedene Rechtecke mit prominenten Seitenverhältnissen in der Umgebung von **Φ=1,618...** . Angegeben ist jeweils das Verhältnis von Höhe zu Breite und der entsprechende Zahlenfaktor:



- 4 : 3 – Traditionelles Fernsehformat und *Ballenformat* für Packpapier. Auch bei älteren Computermonitoren verwendet (z. B.: 1024 × 768 Pixel). Dieses Format geht zurück auf Thomas Alva Edison, der 1889 das Format des klassischen Filmbildes (35-mm-Film) auf 24 × 18 mm festlegte.
- √2 : 1 – Das Seitenverhältnis beim DIN-A4-Blatt und verwandten DIN- / EN- / ISO-Maßen. Bei einer Halbierung durch einen Schnitt, der die längeren Seiten des Rechtecks halbiert, entstehen wiederum Rechtecke mit demselben Seitenverhältnis.
- 3 : 2 – Seitenverhältnis beim Kleinbildfilm (36 mm × 24 mm).
- **Φ : 1** – Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt. Entspricht dem historischen Buchformat *Oktav*. Im Bild approximiert mit 144 Pixel × 89 Pixel (theoretischer Fehler nur $5 \cdot 10^{-5}$). Die beiden benachbarten Rechtecke 3:2 und 5:3 haben Seitenverhältnisse von aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen und approximieren daher ebenfalls den Goldenen Schnitt vergleichsweise gut.
- 5 : 3 – Findet neben dem noch breiteren 1 : 1,85 als Kinofilmformat Verwendung.
- 16 : 9 – Breitbildfernsehen.
- 16 : 10 – Manche Computerbildschirme. Diese passen fast zum Goldenen Schnitt (1 : 1,6)

Architektur

Frühe Hinweise auf eine – vermutlich unbewusste – Verwendung des *Goldenen Schnittes* stammen aus der Architektur. Die Schriften des griechischen Geschichtsschreibers Herodot zur Cheops-Pyramide werden gelegentlich dahingehend ausgelegt, dass die Höhe der Seitenfläche zur Hälfte der Basiskante im Verhältnis des *Goldenen Schnittes* stünde.[43] Die entsprechende Textstelle ist allerdings interpretierbar. Andererseits wird auch die These vertreten, dass das Verhältnis $2 : \pi$ für Pyramidenhöhe zu Basiskante die tatsächlichen Maße noch besser widerspiegele. Der Unterschied zwischen beiden vertretenen Thesen beträgt zwar lediglich 3,0 %, ein absoluter Beweis zugunsten der einen oder anderen These ist demzufolge damit aber nicht verbunden.

Viele Werke der griechischen Antike werden als Beispiele für die Verwendung des *Goldenen Schnittes* angesehen wie beispielsweise die Vorderfront des 447–432 v. Chr. unter Perikles erbauten Parthenon-Tempels auf der Athener

Akropolis.[44] Da zu diesen Werken keine Pläne überliefert sind, ist nicht bekannt, ob diese Proportionen bewusst oder intuitiv gewählt wurden. Auch in späteren Epochen sind mögliche Beispiele für den *Goldenen Schnitt*, wie etwa der Dom von Florenz[45], Notre Dame in Paris oder die Torhalle in Lorsch (770 n. Chr.)[46] zu finden. Auch in diesen Fällen ist die bewusste Anwendung des *Goldenen Schnittes* an Hand der historischen Quellen nicht nachweisbar.

Es gibt demzufolge keinen empirisch gesicherten Nachweis für eine signifikant größere Häufigkeit des *Goldenen Schnittes* in diesen Epochen im Vergleich zu anderen Teilungsverhältnissen. Ebenso fehlen historische Belege für eine absichtliche Verwendung des *Goldenen Schnittes*.

Altes Rathaus, Leipzig

Als ein Beispiel für eine Umsetzung des *Goldenen Schnittes* wird immer wieder das Alte Rathaus in Leipzig, ein Renaissancebau aus den Jahren 1556/57, herangezogen.[47] Der aus der Mittelachse gerückte Rathausturm wird, so wird behauptet, als architektonische Avantgardeleistung der damaligen Zeit angesehen und er stünde mit dem dadurch verursachten Aufruhr für das städtische Selbstbewusstsein der Stadt. Gleichwohl gibt es bei genauer historischer Quellenforschung keinen Beleg dafür. Insbesondere gibt es keinen Beleg dafür, dass Hieronymus Lotter als der damalige Baumeister, den *Goldenen Schnitt* bewusst als Konstruktionsprinzip verwendet hat: Alle originären Quellen verweisen lediglich auf einen gotischen Vorgängerbau, auf dessen Grundmauern Lotter das Rathaus errichtet hat. Dass der *Goldene Schnitt* hier eine Rolle gespielt habe, ist quellenhistorisch nicht belegbar.

Die erste – quellenhistorisch gesicherte – Verwendung des *Goldenen Schnittes* in der Architektur stammt aus dem 20. Jahrhundert: Der Architekt und Maler Le Corbusier (1887–1965) entwickelte ab 1940 ein einheitliches Maßsystem basierend auf den menschlichen Maßen und dem *Goldenen Schnitt*. Er veröffentlichte dieses 1949 in seiner Schrift *Der Modulor*, die zu den bedeutendsten Schriften der Architekturgeschichte und -theorie gezählt wird. Bereits 1934 wurde ihm für die Anwendung mathematischer Ordnungsprinzipien von der Universität Zürich der Titel *doctor honoris causa* der mathematischen Wissenschaften verliehen.[48] Für eine frühere Verwendung dieses Systems ist dieses jedoch aus den aufgezeigten Gründen kein Beleg.

Bildende Kunst

Bildkomposition

Inwieweit die Verwendung des *Goldenen Schnittes* in der Kunst zu besonders ästhetischen Ergebnissen führt, ist letztlich eine Frage der jeweils herrschenden Kunstauffassung. Für die generelle These, dass diese Proportion als besonders ansprechend und harmonisch empfunden wird, gibt es keine gesicherten Belege. Viele Künstler setzten den *Goldenen Schnitt* bewusst ein, bei vielen Werken wurden Kunsthistoriker erst im Nachhinein fündig. Diese Befunde sind jedoch angesichts der Fülle von möglichen Strukturen, wie man sie beispielsweise in einem reich strukturierten Gemälde finden kann, oft umstritten.[49]

So werden zahlreichen Skulpturen griechischer Bildhauer, wie der Apollo von Belvedere, der Leochares (um 325 v. Chr.) zugeschrieben wird, oder Werke von Phidias (5. Jahrhundert v. Chr.) als Beispiele für die Verwendung des *Goldenen Schnittes* angesehen. Auf letzteren bezieht sich auch die heute oft übliche Bezeichnung Φ für den *Goldenen Schnitt*, die von dem amerikanischen Mathematiker Mark Barr eingeführt wurde. Die ebenfalls gelegentlich verwendete Bezeichnung τ bezieht sich dagegen auf das griechische Wort *τομή* für „Schnitt“.[50]

Der *Goldene Schnitt* wird auch in vielen Gemälden der Renaissance vermutet, wie bei Raffael, Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer, zum Beispiel bei da Vincis Das Abendmahl[51] von 1495, bei Dürers Selbstbildnis von 1500 und seinem Kupferstich Melencolia I von 1514.[52]

Auch in der Fotografie wird der *Goldene Schnitt* zur Bildgestaltung eingesetzt. Als Faustformel verwendet man hier die Drittel-Regel.[53][54]

Zeitgenössische bildende Kunst

In der zeitgenössischen bildenden Kunst wird der *Goldene Schnitt* nicht nur als Gestaltungsmerkmal verwendet, sondern ist in manchen Arbeiten selbst Thema oder zentraler Bildinhalt. Der Künstler Jo Niemeyer verwendet den *Goldenen Schnitt* als grundlegendes Gestaltungsprinzip in seinen Werken, die der konkreten Kunst zugeordnet werden.[55] Die Künstlerin Martina Schettina thematisiert den *Goldenen Schnitt* in ihren Arbeiten zum Fünfeck, bei welchem die Diagonalen einander im *Goldenen Schnitt* teilen.[56] Auch visualisiert sie Konstruktionsmethode und Formeln zum *Goldenen Schnitt*.[57]

Akustik und Musik

Intervalle

In der Musik werden Töne als konsonant empfunden, wenn das Verhältnis ihrer Schwingungsfrequenzen ein Bruch aus kleinen ganzen Zahlen ist. Dass eine Annäherung dieses Verhältnisses zum *Goldenen Schnitt* hin nicht unbedingt zu einem wohlklingenden Intervall führt, lässt sich daran erkennen, dass unter den Tonintervallen, deren Schwingungsverhältnis aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen entspricht, höchstens die Quinte mit einem Schwingungsverhältnis von 3:2 herausragt. Die große Terz mit einem Schwingungsverhältnis von 5:4 wird schon als harmonischer empfunden als die große Sexte mit 5:3 und die kleine Sexte mit 8:5. Da ein Tonintervall im *Goldenen Schnitt* nur etwa 19 Cent größer ist als eine kleine Sexte, ist es für ein wenig geschultes Ohr nur schwer von dieser zu unterscheiden (Audiobeispiel).[58]

Komposition

Der *Goldene Schnitt* wird gelegentlich auch in Strukturkonzepten von Musikstücken vermutet. So hat der ungarische Musikwissenschaftler Ernö Lendvai versucht, den *Goldenen Schnitt* als wesentliches Gestaltungsprinzip der Werke Béla Bartóks nachzuweisen. Seiner Ansicht nach hat Bartók den Aufbau seiner Kompositionen so gestaltet, dass die Anzahl der Takte in einzelnen Formabschnitten Verhältnisse bilden, die den *Goldenen Schnitt* approximieren würden. Allerdings sind seine Berechnungen umstritten.[59]

In der Musik nach 1945 finden sich Beispiele für die bewusste Proportionierung nach den Zahlen der Fibonacci-Reihe, etwa im Klavierstück IX von Karlheinz Stockhausen oder in der Spektralmusik von Gérard Grisey.[60]

Instrumentenbau

Der *Goldene Schnitt* wird gelegentlich im Musikinstrumentenbau verwendet. Insbesondere beim Geigenbau soll er für besonders klangschöne Instrumente bürgen. So wird auch behauptet, dass der berühmte Geigenbauer Stradivari den *Goldenen Schnitt* verwendete, um die klanglich optimale Position der F-Löcher für seine Violinen zu berechnen. Diese Behauptungen basieren jedoch lediglich auf nachträglichen numerischen Analysen von Stradivaris Instrumenten. Ein Nachweis, dass Stradivari bewusst den *Goldenen Schnitt* zur Bestimmung ihrer Proportionen angewandt habe, existiert jedoch nicht.[61][62]

Goldener Schnitt von Martina Schettina (2009)

Informatik

In der Informatik speichert man Daten in Hashtabellen, um darauf schnell zuzugreifen. Die Position $h(k)$, an der ein Datensatz k in der Tabelle gespeichert wird, berechnet man durch eine Hashfunktion h . Für einen effizienten Zugriff müssen die Datensätze möglichst gleichmäßig verteilt in die Tabelle geschrieben werden. Eine Variante für die Hashfunktion ist die multiplikative Methode, bei der die Hashwerte für eine Tabelle der Größe m nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$h(k) = \lfloor m(kA - \lfloor kA \rfloor) \rfloor \ .$$

Dabei stellen $\lfloor \ldots \rfloor$ Gaußklammern dar, die den Klammerinhalt auf die nächste ganze Zahl abrunden. Der angesehene Informatiker Donald Ervin Knuth schlägt für die frei wählbare Konstante $A = 1/\Phi$vor, um eine gute Verteilung der Datensätze zu erhalten.[63]
Eine weitere Verbindung zwischen der Informationstheorie und dem *Goldenen Schnitt* wurde durch Helmar Frank mit der Definition der Auffälligkeit hergestellt. Er konnte zeigen, dass der mathematische Wert des Maximums der *Auffälligkeit* sehr nah an das Verhältnis des Goldenen Schnitts herankommt.[64]

Literatur

Historische Literatur

- Luca Pacioli; Constantin Winterberg (Hg. u. Übers.): *Divina Proportione*. Venedig 1509. Carl Graeser, Wien 1889 (im Internet-Archiv: [65], bei alo: [66])
- Adolf Zeising: *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*. Rudolph Weigel, Leipzig 1854 (bei Google Books: [67])
- Adolf Zeising: *Das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen*. Rudolph Weigel, Leipzig 1856 (bei Google Books: [68])
- Gustav Theodor Fechner: *Zur experimentalen Ästhetik*. Hirzel, Leipzig 1871.

Neuere Literatur

- Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: *Der Goldene Schnitt*. Spektrum, Heidelberg, Berlin, Oxford 1996. ISBN 3-86025-404-9.
- Priya Hemenway: *Divine Proportion. Phi in Art, Nature and Science*. Sterling, New York 2005, ISBN 1-4027-3522-7. (Priya Hemenway: *Der Geheime Code: Die rätselhafte Formel, die Kunst, Natur und Wissenschaft bestimmt*. Taschen Verlag, Köln 2008, ISBN 978-3-8365-0708-0.)
- Roger Herz-Fischler: *A mathematical History of the Golden Ratio*. Dover Publications, New York 1998, ISBN 0-486-40007-7.

- Jürgen Fredel: *Maßästhetik. Studien zu Proportionsfragen und zum Goldenen Schnitt*. Lit, Hamburg 1998, ISBN 3-8258-3408-5.
- Albert van der Schoot: *Die Geschichte des goldenen Schnitts. Aufstieg und Fall der göttlichen Proportion. Frommann-Holzboog, Stuttgart 2005, ISBN 3-7728-2218-5.*

  Susanne Deicher: Rezension von: Albert van der Schoot: Die Geschichte des goldenen Schnitts, in: sehepunkte 5 (2005), Nr. 12 [15. Dezember 2005], Weblink [69]
- Hans Walser: *Der Goldene Schnitt*. Teubner, Stuttgart 1993. ISBN 3-8154-2511-5.
- Georg Markowsky: *Misconceptions about the Golden Mean* [70]. The College Mathematics Journal, Band 23, Ausgabe 1, Januar 1992
- Clement Falbo: *The Golden Ratio: A Contrary Viewpoint* [71]. The College Mathematics Journal, Band 36, Ausgabe 2, März 2005

Weblinks

- Alexander Bogomolny: Golden Ratio [72] auf cut-the-knot.org
- Eric W. Weisstein: *Golden Ratio* [73]. In: *MathWorld.* (englisch)
- *Golden Ratio* [74]. In: *MacTutor History of Mathematics archive* (englisch)
- Marcus Frings: *Der Goldene Schnitt* [75]
- Marcus Frings: *The Golden Section in Architectural Theory*, in: Nexus Network Journal Bd. 4/1 (2002), S. 9-32, ISSN 1590-5896. Weblink [76] (kritische Analysen)
- Ruben Stelzner: *Der Goldene Schnitt und das Mysterium der Schönheit,* 2002 [77]
- Der Goldene Schnitt in der Biologie [78] (englisch)
- Fibonacci-Reihen und Goldener Schnitt bei Beobachtung und Simulation biologischer Systeme [79] (englisch)
- Bilder zum Goldenen Schnitt in der Biologie [80]
- Bernhard Peter: *Goldener Schnitt – Mathematik und Bedeutung in der Kunst* [81] (insbes. 34 verschiedene Konstruktionverfahren)
- Video mit Albrecht Beutelspacher [82] (Video-Archiv [83])
- Folge A001622 in OEIS (Dezimalentwicklung von Φ)
- Folge A028259 in OEIS (Engel-Entwicklung von Φ)
- Folge A118242 in OEIS (Pierce-Entwicklung von 1/Φ)

Einzelnachweise

[1] W. Gellert et al: Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1979, S. 184.

[2] S. 101

[3] Ben Green: *Irrational and Transcendental Numbers*. In: Timothy Gowers, June Barrow-Green, Imre Leader: *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton University Press 2008, ISBN 9780691118802, S. 222 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=ZOfUsvemJDMC&pg=PA222#v=onepage))

[4] Forum Geometricorum Volume 5 (2005) 135–136. (http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200518.pdf)

[5] S. 26–29

[6] S. 157–161

[7] S. 87-91

[8] Die hier auftretende Abweichung ist ungefähr 16-mal kleiner als die durch den Dirichletscher Approximationssatz garantierte (nämlich $\frac{1}{49}$). Bei der Näherung von Φ durch $\frac{13}{8}$ ist die Abweichung dagegen nur 2,2-mal kleiner als $\frac{1}{64}$.

[9] a) Bruce Ikenaga: *Rational Approximation by Continued Fractions* (http://marauder.millersville.edu/~bikenaga/numbertheory/approximation-by-rationals/approximation-by-rationals.html) (abgerufen 3. Dezember 2009), b) Serge Lang: *Introduction to Diophantine Approximations*, Springer-Verlag 1995, S. 9, c) Ivan Niven, Herbert S. Zuckermann, Hugh L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1960, 5. Auflage 1991, ISBN 0-471-54600-3, S. 338 (Theorem 7.13). Man beachte aber: dieser Satz schließt nicht aus, dass es außer diesen Brüchen $\frac{p}{q}$ nicht noch weitere beste Approximationen geben kann. Zum Beispiel approximiert $\frac{13}{4}$ die Zahl π besser als 3 und $\frac{311}{99}$ approximiert π besser als $\frac{22}{7}$.

[10] *Golden ratio*. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Golden_ratio&oldid=11236

[11] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, 20. Auflage, Gemeinschaftsauflage Verlag Nauka Moskau und BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981, S. 167

[12] Florian Jarre, Josef Stoer: *Optimierung*. Springer, Berlin 2004, ISBN 3-540-43575-1, S. 130ff. (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=DyHc3WU0QOcC&pg=PA130#v=onepage))

[13] W. Gellert et al.: Kleine Enzyklopädie Mathematik. VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1979. S. 694.

[14] Allgemeine deutsche Real-Enzyklopädie für die gebildeten Stände. In zehn Bänden. Vierter Band (G und H). Fünfte Original-Ausgabe, F A. Brockhaus, Leipzig, 1819, S. 296.

[15] *The Golden ratio* (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Golden_ratio.html). In: *MacTutor History of Mathematics archive* (englisch)

[16] S. 10, 15

[17] Rudolf Haller: *Elemente des Euklid* (http://www.opera-platonis.de/euklid/index.html). Edition Opera Platonis 2010, Buch II, Satz 11 (http://www.opera-platonis.de/euklid/eb2/eb209.htm)

[18] Wenn es zutrifft, dass *Hippasos* die Irrationalität am Fünfeck (und nicht am Viereck) entdeckt hat, so wäre er auch Erfinder des *Goldenen Schnittes*. Da aber genau das umstritten ist - siehe Leonid Zhmud (1997) S. 174f. (argumentiert für das Quadrat) und Kurt von Fritz: *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin 1971, S. 564–569 (plädiert für das Fünfeck); Dirk Stegmann plädiert in Der Goldene Schnitt (http://www.uni-hildesheim.de/~stegmann/goldschn.pdf) (PDF), S. 10 sehr überzeugend für *Hippasos*. Andrenfalls ist *Eudoxos* mit seinen Forschungen zur Proportionalität und als nachweisbarer Ideengeber für *Euklid* dann als Erfinder anzusehen.

[19] Leonardo da Pisa, *Liber abbaci* (cap. I, 7, dort unter anderen Aufgaben: *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur*), hrsg. von Baldassare Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Band I, Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857, S. 283f., Wiedergabe der Handschrift Florenz, Cod. magliabechiano cs cI, 2626, fol. 123v-124r, bei Heinz Lüneburg, *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, 2. überarb. und erw. Ausg., Mannheim u. a.: BI Wissenschaftsverlag, 1993, ISBN 3-411-15462-4, nach S. 252; Wiedergabe des lateinischen Textes der Kaninchenaufgabe u. a. bei Bernd Thaller, Leonardo und der Goldene Schnitt (http://math.uni-graz.at/mug/Files/fibonacci.pdf) (8. Dezember 2009, PDF), mit engl. Übersetzung bei Roberto Bignoni, The Golden Number − 3 − (http://www.robertobigoni.eu/Matematica/NAureo/successioni/sequences.htm).

[20] Formalisierte Wiedergabe nach Heinz Lüneburg, *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, 2. überarb. und erw. Ausg., Mannheim u.a.: BI Wissenschaftsverlag, 1993, ISBN 3-411-15462-4, S. 298

[21] Leonardo da Pisa, *Liber abbaci*, cap. 15, ed. Boncompagni S. 438, zu finden auch schon in der Wiedergabe von cap. 15 bei Guillaume Libri, *Histoire des sciences mathématiques in Italie*, Band II, Paris: Jules Renouard et C.ie, 1838, S. 430 (Auszug (http://books.google.de/books?id=W-DuAAAAMAAJ&pg=PA430#v=onepage) in der *Google Buchsuche*)

[22] Leonard Curchin / Roger Herz-Fischler, *De quand date le premier rapprochement entre la suite de Fibonacci et la division en extrême et moyenne raison?*, in: Centaurus 28,2 (1985), S. 129–138, S. 130

[23] Roger Herz-Fischler, *A mathematical History of the Golden Ratio*, Dover Publications, Minneola (New York) 1998, S. 158 (Section 31.J.iii)

[24] Adolf Zeising: *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*. Rudolph Weigel, Leipzig 1854, S. 264.

[25] Marguerite Neveux, H. E. Huntley: *Le nombre d'or. Radiographie d'un mythe suivi de La Divine Proportion*. Éd. du Seuil, 1995, ISBN 9-782-02025-916-3.

[26] Martin Ohm: *Die Reine Elementarmathematik Bd II: Die ebene Raumgrößenlehre*. Jonas Verlagsbuchhandlung, Berlin 1835, S. 194.

[27] Gustav Theodor Fechner: *Vorschule der aesthetik*. Breitkopf & Härtel, 1876, S. 190.

[28] Camillo Sitte: *Über den praktischen Wert der Lehre vom goldenenen Schnitt*. In: Camillo Sitte: *Schriften zu Kunsttheorie und Kunstgeschichte*. Böhlau 2010, ISBN 9783205784586, S. 435-446, bes. 438-439 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=z3UYVejPC8kC&pg=PA438#v=onepage))

[29] Underwood Dudley: *Die Macht der Zahl: Was die Numerologie uns weismachen will*. Gabler 1999, ISBN 3764359781, S. 243-245 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=pd2DCv-m7egC&pg=PA243#v=onepage))

[30] *Marguerite Neveux : « Le nombre d'or est une affabulation »* (http://www.larecherche.fr/content/recherche/article?id=10282). Webseite von *La Recherche* (populärwissenschaftliche Zeitschrift) (abgerufen 1. November 2011)

[31] S. 124

[32] S. 123

[33] S. 128

[34] S. 125

[35] S. 123

[36] S. 128

[37] S. 130–133

[38] Siehe Dvorak/Freistetter/Kurths: *Chaos and stability in planetary systems* (Springer Lecture Notes in Physics, 2006), S. 118–121 und den Wikipedia-Artikel über noble Zahlen.

[39] Remo Badii, A. Politi: *Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics*. Cambridge University Press 1999, ISBN 0-521-66385-7 , S. 46 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=u0L6B4VmVCUC&pg=PA46#v=onepage))

[40] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J.W. Cahn: *Metallic phase with long range orientational order and no translation symmetry*. In: *Physical Review Letters*. 53(20), 1984, S. 1951–1954.

[41] *The Nobel Prize in Chemistry 2011 – Scientific Background*. (http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2011/advanced.html) Nobelprize.org, 6. Mai 2012, abgerufen am 6. Mai 2012.
[42] *The Nobel Prize in Chemistry 2011*. (http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2011/) Nobelprize.org, 2. Mai 2012, abgerufen am 2. Mai 2012.
[43] S. 136–137
[44] S. 138
[45] S. 138–141
[46] S. 138
[47] Hierzu z. B. Altes Rathaus in *Leipzig-Lexikon* (http://www.leipzig-lexikon.de/SONSTBAU/arathaus.htm) mit weiteren Nachweisen. Zuletzt aufgerufen am 3. Juni 2012.
[48] S. 142–147
[49] Mario Livio: *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books, 2003, ISBN 9-780-76790-816-0, S. 177-178.
[50] Mario Livio: *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books, 2003, ISBN 9-780-76790-816-0, S. 5.
[51] Bernhard Peter: *Der Goldene Schnitt in Leonardos Abendmahl* (http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/seite586.htm) auf www.dr-bernhard-peter.de (abgerufen 1. November 2011)
[52] S. 148–155
[53] Michael Frye: *Digitale Landschaftsfotografie: Fotografieren wie Ansel Adams und Co.* Hüthig Jehle Rehm 2010, ISBN 978-3-8266-5896-9, S. 72 (Auszug (http://books.google.de/books?id=5zHv_s1xiCYC&pg=PA72#v=onepage) in der *Google Buchsuche*)
[54] Garry Reynolds: *Zen oder die Kunst der Präsentation: mit einfachen Ideen gestalten und präsentieren*. Pearson Education 2008, ISBN 978-3-8273-2708-6, S. 151–152 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=_Dyh9T-ggZkC&pg=PA151#v=onepage))
[55] Bernhard Peter: *Der Goldene Schnitt in der konkreten Kunst: Beispiele von Jo Niemeyer* (http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/niemeyer2.htm) auf www.dr-bernhard-peter.de (abgerufen 1. November 2011)
[56] Bilder im virtuellen Mathe-Museum der [[Technische Universität Bergakademie Freiberg|TU Freiberg (http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/schettina/galerie.html)]]
[57] Mathe-Museum TU Freiberg (http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/schettina/der-goldene-schnitt.html)
[58] Helmut Reis: *Der goldene Schnitt und seine Bedeutung für die Harmonik* (= *Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen der Musik 54*). Verlag für Systematische Musikwissenschaft, 1990, ISBN 9-783-92262-654-1.
[59] S. 165–167
[60] Jonathan Kramer: *The Fibonacci Series in Twentieth-Century Music*. In: *Journal of Music Theory*. 17, Nr. 1, 1973, S. 110–148.
[61] *How a Violin is Made*. In *Popular Mechanics*, September 1943, S. 106-108 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=kCcDAAAAMBAJ&pg=PA106#v=onepage))
[62] Stewart Pollens: *Stradivari*. Cambridge University Press 2010, ISBN 978-0-521-87304-8, S. 239 (Auszug (Google) (http://books.google.de/books?id=_dFwvjj--MsC&pg=PA239#v=onepage))
[63] Thomas H. Cormen, Charles Leiserson, Ronald Linn Rivest, Clifford Stein: *Introduction to Algorithms*. 2. Aufl. MIT Press, 2001, ISBN 0-262-53196-8, S. 231–232
[64] Horst Völz: *Computer und Kunst*, Reihe akzent 87. 2. Aufl. Urania-Verlag Leipzig Jena - Berlin 1990 (http://aes.cs.tu-berlin.de/voelz/PDF/ComputerKunst.pdf) (ab Seite 14 der PDF-Version) ISBN 3332002201
[65] http://www.archive.org/details/divinaproportio00pacigoog
[66] http://www.literature.at/alo?objid=16478
[67] http://books.google.de/books?id=k8g6AAAAcAAJ
[68] http://books.google.de/books?id=n8g6AAAAcAAJ
[69] http://www.sehepunkte.de/2005/12/8376.html
[70] http://www.umcs.maine.edu/~markov/GoldenRatio.pdf
[71] http://www.cdlmadrid.org/cdl/htdocs/universidaddeotono/unioto/matematicas/goldenratio.pdf
[72] http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml
[73] http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html
[74] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics//Golden_ratio.html
[75] http://www.marcus-frings.de/texte/text-gs.htm
[76] http://www.marcus-frings.de/texte/text-nnj.htm
[77] http://www.golden-section.eu
[78] http://www.math.smith.edu/~phyllo
[79] http://www.branta.connectfree.co.uk/fibonacci.htm
[80] http://www.uwe-alfer.de/privat/privat_fib010.html
[81] http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/seite74.htm
[82] http://www.br.de/fernsehen/br-alpha/sendungen/mathematik-zum-anfassen/mathematik-zum-anfassen-der-goldene-schnitt100.html
[83] http://www.br-online.de/br-alpha/mathematik-zum-anfassen/mathematik-zum-anfassen-albrecht-beutelspacher-mathematik-ID1207039260448.xml

- Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: *Der Goldene Schnitt*. Spektrum, Heidelberg, Berlin, Oxford 1988. ISBN 3-411-03155-7

Quelle(n) und Bearbeiter des/der Artikel(s)

Goldener Schnitt *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=106877994 *Bearbeiter*: 24-online, 32X, A.Heidemann, ADK, ADwarf, AF666, APPER, Abdull, Abysmaroth, Achim1999, AchimvB, Adrian Roßner, Aglarech, Aka, Akribix, Alex.pf, Alex161803, Alexander.stohr, Alexkin, Alfe, Alfred Heiligenbrunner, Allen McC., Allesmüller, Alnilam, Aloiswuest, Analemma, Anathema, Anaxo, Andre Engels, Andreas 06, Andreas aus Hamburg in Berlin, Anton, Aplusus, Arbol01, ArchiKat, Arno Nymus, Azor, BKSlink, BMK, Baumfreund-FFM, Beleghil, Ben-Zin, Bender235, Benji, Berkemeier, Bernd vdB, Berni, BesondereUmstaende, Björn Bornhöft, Blubbalutsch, Blubblee, Bob.v.R, Boehm, Boemmels, Boonekamp, Bosper, BoyBoy, Brühl, Bunthausspitze, Bücherwürmlein, C rall, Carebo69, Carschten, Caulfield, Ce2, Cepheiden, Chemiewikibm, Cherubino, Chesk, Chillvie, ChrisHamburg, Christian1985, ChristophDemmer, Commander-pirx, CommonsDelinker, Complex, Conny, Conversion script, Cäsium137, D, Dadamax, Daniel FR, Daniel Markovics, Daniel Seibert, Daniel5Ko, Das O2, Deep7, Delian, Der.Traeumer, DerGraueWolf, DerHexer, Dfrede, Diba, Digamma, Dishayloo, Diwas, Docfeelgood3, Dodo von den Bergen, Dominik, Don Magnifico, Dr. Angelika Rosenberger, Dr. Volkmar Weiss, Drumknott, DuMonde, EPOS, Edia, Ejfis, El Grafo, El., Elisabeth59, Emeritus, Engie, Ephraim33, Epistates, Ercas, Erwin Mustermann, Evans Fan 2012, Felix Stember, FelixP, Fgb, Fiedlschuster, FifthNovember, Filip nohe, Finte, Fishbone16, Flar, Flohzelle, Fritzbruno, Frostus, G-Man, GNosis, Galilea, Gancho, Geminus, Geof, Georg-Johann, Gepardenforellenfischer, Gerbil, Gerhardvalentin, GiantPanda, Giftmischer, Graphikus, Griensteidl, Guandalug, Guido Watermann, H.Albatros, HaTe, HaeB, Hannes Röst, Hans Koberger, Happy spider, Hardenacke, Hartmut Riehm, Hati, Helium4, Helmut Rasinger, Henriette Fiebig, HenrikHolke, Hephaion, Herr Th., Herr W, Hgulf, Hi-Lo, HilberTraum, Hob Gadling, Horst Gräbner, Howwi, Hubertl, Ice51, Immanuel Goldstein, Ironix, Ixitixel, JFKCom, JN, Jaer, Jawbone, JeLuF, Jed, Jens Liebenau, Jesi, Jivee Blau, Joey-das-WBF, Johnny Controletti, Jpp, Judit Franke, Juela, Juesch, Jumbo1435, Justy, Kaeltor, Kaisersoft, Kam Solusar, Kaneiderdaniel, Karl-Henner, Katimpe, Kibert, Kiker99, Kku, Klabube, Kleiner Tiger, Kmhkmh, Kohl, Kolja21, Konstantin1996, Krawi, Kurt Jansson, KurtSchwitters, Königin der Nacht, L337r007, LKD, LZ6387, Laba84, Langec, Leonhard.Moehring, Lesabendio, Leuchter, LewaLoa, Leyo, Liberaler Humanist, Linkchecker BR, Logograph, Lohan, Lucanus, Lumu, Lómelinde, Löschfix, MDCremer, MFM, MKI, Madden, Maelcum, Magnummandel, Manuel Strehl, Martin Bahmann, Martin Homuth-Rosemann, Martin-vogel, Mathemaduenn, Matt1971, Matthead, Matthy, Mediocrity, Michael salcher, Michail, Michail der Trunkene, Mike aus dem Bayerwald, Mikue, Mini-floh, Mipani, Mm1671, Mo4jolo, Mosmas, Muck, Mudd1, Mussklprozz, Mvb, N0tron, Necrophorus, NiKo, Niels667, Nikkis, Nils Boßung, NonScolae, Nordald, Numbo3, Nwabueze, O.Koslowski, Oberbefehlshaber, Oculus Spectatoris, Olaf1541, Orci, Ot, Otfried Lieberknecht, P. Birken, Pacogo7, Pendula, Pendulin, Peter Steinberg, Peter Weis, Peter200, PhilipKern, Philipendula, Pi666, Pilawa, Pittimann, Pjacobi, Pomponius, Priwo, Pucky2012, Pygmalion, Quartl, Quinbus Flestrin, RPI, RacoonyRE, Radschläger, Ralf Roletschek, Raymond, Rdb, Rechenschieber, Reenpier, Regi51, Reinhard Kraasch, Renekaemmerer, ReqEngineer, Rhododendronbusch, Rilegator, Robert Kropf, RokerHRO, Roland Kaufmann, Rolf Böhm, Rolf Oberhänsli, Rote4132, Rr2000, Rubidio, Runklruam, Ruscsi, S.W., Sadduk, Saehrimnir, Salmi, Samueltraber, Schaengel89, Schewek, Schimon, Schleichfuchs, Schlesinger, Schlurcher, Schniggendiller, Schwijker, SeSchu, Sebastian Muders, Seewolf, Sentry, SilavoN, Simon-Martin, Sinn, Sir, SirJective, Smalltown Boy, Smial, Snotty, Solobratscher, Sozi, Speck-Made, Splatter, Sporado, Sprachfreund49, Spuerhund, Spuk968, Srbauer, Srittau, Stefan Birkner, Stefan64, Stefan80h, Stefan@freimark.de, StephanKetz, Stern, Stw, Subfader, Succu, Suirenn, Svebert, Sängerkrieg auf Wartburg, TB42, Tali, Taxiarchos228, The-pulse, Thomas G. Graf, Thorbjoern, Thornard, Tilla, Timo Baumann, Timo Müller, TimofeyPnin, Tobias Conradi, Tobias1983, TomAlt, TommyTiger, Tommyscheinpflug, Trupp, Tryptophan, Tsor, Tw86, Tönjes, Umherirrender, Umweltschützen, Uncopy, Undergaveragent, Unscheinbar, UweHaupt, VanBuren, Vesta, Voglerh, Volunteer, Vsop, W like wiki, W!B:, WAH, WOBE3333, Wantanabe, Watzmann, Weialawaga, Wfstb, Widerborst, Wilfried Neumaier, Wolfgangbeyer, Wunderknabe, XRay, Xario, Xls, Yamavu, Yorg, YourEyesOnly, Yuszuv, Zaphiro, Zbik, Zickzack, Zinnmann, Zooloo, Zornfrucht, Åkebråke, 677 anonyme Bearbeitungen

Quelle(n), Lizenz(en) und Autor(en) des Bildes

Datei:Golden ratio line percentages.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Golden_ratio_line_percentages.svg *Lizenz*: Public Domain *Bearbeiter*: Golden_ratio_line.svg: Traced by User:Stannered derivative work: Kmhkmh

Datei:SimilarGoldenRectangles.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:SimilarGoldenRectangles.svg *Lizenz*: Creative Commons Zero *Bearbeiter*: Ahecht (Original); Pbroks13 (Derivative work)

Datei:Goldener Schnitt Konstr beliebt.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_Konstr_beliebt.svg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Daniel Seibert Original uploader was Daniel Seibert at de.wikipedia

Datei:Goldener Schnitt (Euklid).svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_(Euklid).svg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Wolfgang Beyer & Konstantin1996 at de.wikipedia

Datei:Golden-section-simple.gif *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Golden-section-simple.gif *Lizenz*: Creative Commons Attribution 3.0 *Bearbeiter*: Pendel Hofstetter Kurt Langegasse 42/3.2 1080 Vienna

Datei:Goldener Schnitt (Äußere Teilung).svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_(Äußere_Teilung).svg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Wolfgang Beyer (Quelle in PNG) & Konstantin1996 (PNG → SVG)

Datei:GoldenRatio Constr Odom.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:GoldenRatio_Constr_Odom.svg *Lizenz*: Creative Commons Attribution 3.0 *Bearbeiter*: Daniel Kaneider (Kaneiderdaniel)

Datei:Golden ratio - Pentagram.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Golden_ratio_-_Pentagram.svg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Nils Boßung (the original PNG image is by Wolfgang Beyer)

Datei:Goldener Winkel.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Winkel.svg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Kaneiderdaniel

Datei:Goldener Schnitt Blattstand.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_Blattstand.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Original uploader was Wolfgangbeyer at de.wikipedia

Datei:Goldene Spirale.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldene_Spirale.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Wolfgang Beyer at de.wikipedia

Datei:Icosahedron-golden-rectangles.svg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Icosahedron-golden-rectangles.svg *Lizenz*: Public Domain *Bearbeiter*: Fropuff, Mysid

Datei:Liber abbaci magliab f124r.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg *Lizenz*: Public Domain *Bearbeiter*: G.dallorto, Karl.Kirst, Mdd, Otfried Lieberknecht, Sailko, Warburg, 1 anonyme Bearbeitungen

Datei:Uomo Vitruviano.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Uomo_Vitruviano.jpg *Lizenz*: Public Domain *Bearbeiter*: DenghiùComm, Jeff G., Jökullinn, Quibik, Trijnstel, 1 anonyme Bearbeitungen

Datei:Goldener Schnitt Fichtenzapfen.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_Fichtenzapfen.jpg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Original uploader was Wolfgangbeyer at de.wikipedia

Datei:Goldener Schnitt Bluetenstand Sonnenblume.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_Bluetenstand_Sonnenblume.jpg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Dr. Helmut Haß, Koblenz Original uploader was Wolfgangbeyer at de.wikipedia

Datei:Goldener Schnitt Bluetenstand Theorie.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_Bluetenstand_Theorie.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Original uploader was Wolfgangbeyer at de.wikipedia

Datei:Efeublatt.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Efeublatt.jpg *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Original uploader was Galilea at de.wikipedia

Datei:Goldener Schnitt Rechtecke Aspect ratio compare6.png *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Goldener_Schnitt_Rechtecke_Aspect_ratio_compare6.png *Lizenz*: GNU Free Documentation License *Bearbeiter*: Wolfgang Beyer, uploaded by Andreas -horn- Hornig

Datei:Fotothek df roe-neg 0006253 020 Vorderansicht des Alten Rathauses.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Fotothek_df_roe-neg_0006253_020_Vorderansicht_des_Alten_Rathauses.jpg *Lizenz*: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Germany *Bearbeiter*: Martin H.

Datei:Der-goldene-schnitt.jpg *Quelle*: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Der-goldene-schnitt.jpg *Lizenz*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter*: Marinelli

Lizenz

Wichtiger Hinweis zu den Lizenzen

Die nachfolgenden Lizenzen bezieht sich auf den Artikeltext. Im Artikel gezeigte Bilder und Grafiken können unter einer anderen Lizenz stehen sowie von Autoren erstellt worden sein, die nicht in der Autorenliste erscheinen. Durch eine noch vorhandene technische Einschränkung werden die Lizenzinformationen für Bilder und Grafiken daher nicht angezeigt. An der Behebung dieser Einschränkung wird gearbeitet.
Das PDF ist daher nur für den privaten Gebrauch bestimmt. Eine Weiterverbreitung kann eine Urheberrechtsverletzung bedeuten.

Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported - Deed

Diese "Commons Deed" ist lediglich eine vereinfachte Zusammenfassung des rechtsverbindlichen Lizenzvertrages (http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported) in allgemeinverständlicher Sprache.
Sie dürfen:

- das Werk bzw. den Inhalt **vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen**
- **Abwandlungen und Bearbeitungen** des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen

Zu den folgenden Bedingungen:

- **Namensnennung —** Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen.
- **Weitergabe unter gleichen Bedingungen —** Wenn Sie das lizenzierte Werk bzw. den lizenzierten Inhalt bearbeiten, abwandeln oder in anderer Weise erkennbar als Grundlage für eigenes Schaffen verwenden, dürfen Sie die daraufhin neu entstandenen Werke bzw. Inhalte nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergeben, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch, vergleichbar oder kompatibel sind.

Wobei gilt:

- **Verzichtserklärung —** Jede der vorgenannten Bedingungen kann aufgehoben werden, sofern Sie die ausdrückliche Einwilligung des Rechteinhabers dazu erhalten.
- **Sonstige Rechte —** Die Lizenz hat keinerlei Einfluss auf die folgenden Rechte:
  - Die gesetzlichen Schranken des Urheberrechts und sonstigen Befugnisse zur privaten Nutzung;
  - Das Urheberpersönlichkeitsrecht des Rechteinhabers;
  - Rechte anderer Personen, entweder am Lizenzgegenstand selber oder bezüglich seiner Verwendung, zum Beispiel Persönlichkeitsrechte abgebildeter Personen.
- **Hinweis —** Im Falle einer Verbreitung müssen Sie anderen alle Lizenzbedingungen mitteilen, die für dieses Werk gelten. Am einfachsten ist es, an entsprechender Stelle einen Link auf http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de einzubinden.

Haftungsbeschränkung
Die „Commons Deed" ist kein Lizenzvertrag. Sie ist lediglich ein Referenztext, der den zugrundeliegenden Lizenzvertrag übersichtlich und in allgemeinverständlicher Sprache, aber auch stark vereinfacht wiedergibt. Die Deed selbst entfaltet keine juristische Wirkung und erscheint im eigentlichen Lizenzvertrag nicht.

GNU Free Documentation License

Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies

of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.
This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.
We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.
A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.
A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.
The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.
The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.
A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".
Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.
The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.
A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.
The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.
You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.
If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.
If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.
It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- **A.** Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- **B.** List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- **C.** State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- **D.** Preserve all the copyright notices of the Document.
- **E.** Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- **F.** Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- **G.** Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- **H.** Include an unaltered copy of this License.
- **I.** Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- **J.** Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- **K.** For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- **L.** Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- **M.** Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- **N.** Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- **O.** Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.
You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties--for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.
You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.
The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.
The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.
In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.
You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright (c) YEAR YOUR NAME.
>
> Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document
>
> under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2
>
> or any later version published by the Free Software Foundation;
>
> with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.
>
> A copy of the license is included in the section entitled
>
> "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the
>
> Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Der Goldene Schnitt

**Mathematische Betrachtungen zu einem antiken Thema,
welches bis heute aktuell geblieben ist**

von

Dirk Stegmann

**Universität Hildesheim
- Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung -
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim**

1. Die Grundlagen

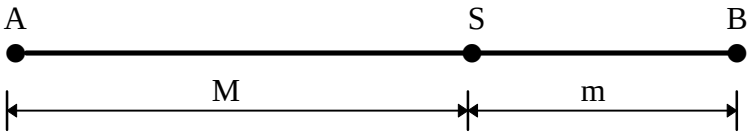
Im zweiten Buch der **Elemente** des griechischen Mathematikers EUKLID (365 - 300 v.Chr.) liest man als 11. Satz[1] die folgende Aufgabe:

Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

Die **Elemente** bilden das älteste mathematische Werk, in dem der goldene Schnitt - in der Form dieser Aufgabe - behandelt wird.

Heute definiert man den goldenen Schnitt üblicherweise folgendermaßen:

Definition:	Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Ein Punkt S von $\overline{AB}$ teilt $\overline{AB}$ im **goldenen Schnitt**, falls sich die größere Teilstrecke zur kleineren verhält wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil.



Die Länge der Strecke $\overline{AS}$ wird mit M bezeichnet und **Major** genannt. Entsprechend heißt die kürzere Strecke m der **Minor**.
„Maior“ und „Minor“ sind die lateinischen Worte für „größer“ und „kleiner“.

Mit diesen Bezeichnungen können wir den goldenen Schnitt wie folgt beschreiben:

Sei $\overline{AB}$ eine Strecke der Länge a. Ein Punkt S von $\overline{AB}$ teilt diese Strecke im goldenen Schnitt, falls gilt:

$$\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$$

also genau dann, wenn $am = M^2$ gilt.

An dieser letzten Beschreibung wird deutlich, daß die eingangs zitierte Aufgabe von EUKLID tatsächlich nichts anderes als die Konstruktion des goldenen Schnitts bedeutet.

Wir können diese Formulierung auch dazu verwenden, den goldenen Schnitt „auszurechnen“.

Es gilt nämlich der folgende wichtige

[1] Wir zitieren nach der Ausgabe: EUKLID: **Die Elemente**. Buch I - XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von CLEMENS THAER. Darmstadt 1991.

Satz: Genau dann teilt ein Punkt S die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, wenn

$$\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ gilt.

Beweis: Es sei a die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt a = M + m. Aus der Definition des goldenen Schnittes ergibt sich weiter:

S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt

$\Leftrightarrow$ $am = M^2$ [Definition des goldenen Schnitts]

$\Leftrightarrow$ $(M + m)m = M^2$ [Einsetzen von a = M + m]

$\Leftrightarrow$ $M/m + 1 = (M/m)^2$ [Division durch m^2]

$\Leftrightarrow$ $(M/m)^2 - M/m - 1 = 0$

Diese quadratische Gleichung in der Unbekannten M/m hat die beiden Lösungen:

$$M/m = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad .$$

Da M und m positiv sind, muß auch M/m positiv sein, so daß als Lösung nur

$$M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

in Frage kommt. Dies war die Behauptung. QED.

Bemerkung: Die Konstante $M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird in der Literatur häufig mit τ bezeichnet,

also: $\tau := M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Wir wollen verabreden, den Ausdruck „goldener Schnitt“ großzügig zu handhaben. Er kann in dreifacher Weise gebraucht werden:

- als Bezeichnung für den Vorgang der Teilung
- als Bezeichnung für den Teilpunkt S
- als Bezeichnung für die Zahl τ selber.

Der Zahlenwert für den goldenen Schnitt τ beträgt ungefähr[2]: $\tau \approx$ **1,618**.

Als Beleg dafür, daß der goldene Schnitt häufig in der Architektur Verwendung gefunden hat, führen wir die folgenden beiden Beispiele aus der Zeit der Renaissance an:

Das erste Bild zeigt das **alte Rathaus von Leipzig**, in welchem sich übrigens auch der durch GOETHES **Faust** berühmte „Auerbachsche Keller“ befindet.

[2] Für Zahlenenthusiasten sei dieser Wert etwas genauer angegeben:

$\tau = (1+\sqrt{5})/2$ = 1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621 35...

Das zweite Bild stellt den **Palazzo Vecchio von Florenz** dar.

In beiden Fällen teilt der Turm die Vorderfront des Gebäudes im goldenen Schnitt, wie man leicht nachmessen kann.

Bild 1

Bild 2

2. Die Eigenschaften der goldenen Schnittzahl τ

Der goldene Schnitt τ erfüllt die Bedingungen des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz: (i) Es gilt: $\tau^2 = \tau + 1$
und für jede positive reelle Zahl mit $x^2 = x + 1$ ist umgekehrt $x = \tau$.

(ii) $1/\tau = \tau - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(iii) $\tau + 1/\tau = \sqrt{5}$

Beweis: (i) ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Kapitel 1.
(ii) Multiplizieren wir die Gleichung (i) mit $1/\tau$, so ergibt sich:

$\tau = 1 + 1/\tau$ und damit $1/\tau = \tau - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(iii) $\tau + 1/\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$. QED.

Bemerkung: Eine wichtige Konsequenz aus diesem Hilfssatz ist die bemerkenswerte Tatsache, daß alle positiven wie negativen Potenzen von τ sich als lineare Ausdrücke in τ, also in der Form $a\tau + b$ mit ganzzahligen a und b, schreiben lassen.

An späterer Stelle werden wir hierauf noch genauer eingehen.

An dieser Stelle soll folgendes Beispiel genügen:

$$\tau^3 + \tau^{-2} = \tau \cdot \tau^2 + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\tau} = \tau(\tau+1) + (\tau-1)^2 = 2\tau^2 - \tau + 1$$
$$= 2(\tau+1) - \tau + 1 = \tau + 3.$$

Wir fassen alle wichtigen Eigenschaften des goldenen Schnittes in folgendem Satz zusammen:

Satz: Eine Strecke $\overline{AB}$ habe die Länge a, und S sei ein Punkt dieser Strecke. Wenn wir mit M die Länge von $\overline{AS}$ und mit m die von $\overline{SB}$ bezeichnen, dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(1) S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt.
(2) $M/m = \tau$.
(3) $(M/m)^2 = M/m + 1$
(4) $a/M = \tau$
(5) $a/m = \tau + 1$

Beweis: Die Gleichwertigkeit von (1) und (2) ist die Aussage des Satzes von Kapitel 1.

Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt direkt aus dem Teil (i) unseres Hilfssatzes:
Falls $M/m = \tau$ ist, dann gilt nach (i): $(M/m)^2 = \tau^2 = \tau + 1 = M/m + 1$.
Falls umgekehrt $(M/m)^2 = M/m + 1$ gilt, so hat man mit $x := M/m$ die Gleichung $x^2 = x + 1$ und damit nach Hilfssatz (i) $x = \tau = M/m$.

(1) $\Leftrightarrow$ (4): Nach Definition ist (1) genau dann wahr, wenn $am = M^2$ gilt.
Wegen $a = M + m$ erhalten wir:

	$am = M^2$	
$\Leftrightarrow$	$a(a - M) = M^2$	[Einsetzen von $m = a - M$]
$\Leftrightarrow$	$a^2 = M^2 + aM$	
$\Leftrightarrow$	$(a/M)^2 = a/M + 1$	[Division durch M^2]
$\Leftrightarrow$	$a/M = \tau$	[Nach Hilfssatz (i)]

(1) $\Leftrightarrow$ (5):

	$M^2 = am$	
$\Leftrightarrow$	$(a - m)^2 = am$	[Einsetzen von $M = a - m$]

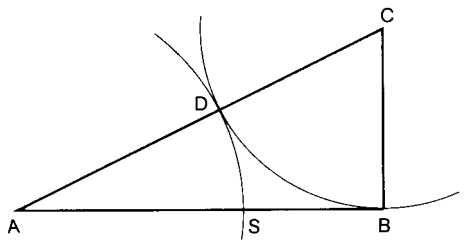
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a-m}{m}\right)^2 = \frac{a}{m} = \frac{a-m}{m} + 1 \quad \text{[Division durch } m^2\text{]}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a-m}{m} = \tau \quad \text{[Hilfssatz (i)]}$$

$$\Leftrightarrow \quad a/m = \frac{a-m}{m} + 1 = \tau + 1 \quad \text{QED.}$$

3. Die Konstruktion des goldenen Schnittes

Der goldene Schnitt läßt sich mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren, wie man der folgenden Figur entnimmt:



Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke der Länge a. In B errichte man die Senkrechte $\overline{BC}$ der Länge a/2, also |BC| = a/2 und $\overline{BC} \perp \overline{AB}$.
Der Kreis um C mit Radius |CB| schneidet $\overline{AC}$ in einem Punkt D.
Der Kreis um A mit Radius |AD| schneidet schließlich $\overline{AB}$ im goldenen Schnittpunkt S.

Daß diese Konstruktion tatsächlich den goldenen Schnitt liefert, sieht man schnell ein:

Nach dem *Satz des Pythagoras* ist

$$|AC| = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

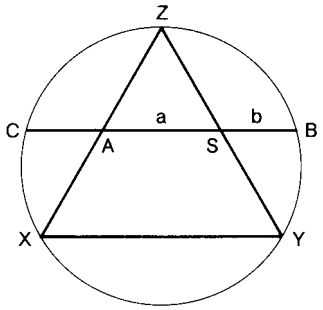
Auf Grund der Konstruktion gilt $|CD| = |CB| = \frac{a}{2}$, so daß wir haben:

$$|AS| = |AD| = |AC| - |CD| = a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = \frac{a}{\tau}.$$

Also: $\frac{|AB|}{|AS|} = a/(a/\tau) = \tau$ QED.

Es gibt mehrere Methoden, mit Zirkel und Lineal den goldenen Schnitt zu konstruieren.

Wir wollen hier nur noch eine Konstruktion erwähnen, die interessanterweise EUKLID noch nicht kannte, sondern erst 1982 von GEORGE ODOM angegeben wurde:



Das Dreieck ΔXYZ sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2a.
A und S seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{XZ}$ und $\overline{YZ}$.
Die Mittelparallele SA möge den Umkreis in den Punkten C und B schneiden.

Dann gilt: S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt.

Beweis: Nach Konstruktion ist |YS| = |SZ| = a. Aus dem *2. Strahlensatz* ergibt sich dann: |AS| = a.
Mit b sei die Länge der Strecke $\overline{SB}$ bezeichnet. Dann ist aus Symmetriegründen auch |AC| = b.
Wir betrachten nun die beiden Sehnen $\overline{YZ}$ und $\overline{BC}$, die sich in S schneiden.
Nach dem *Sehnensatz* ergibt sich

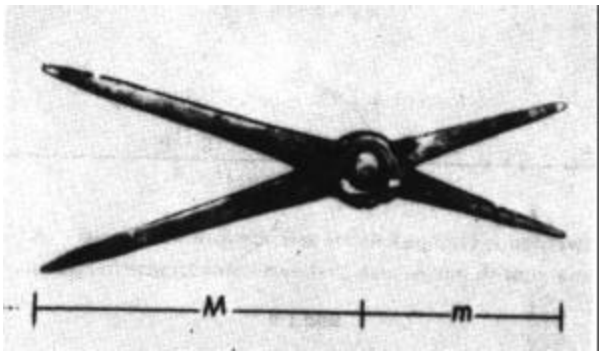
$$a^2 = |SY| \cdot |SZ| = |SB| \cdot |SC| = b(a + b)$$

$$\Rightarrow \quad (a/b)^2 = a/b + 1 \qquad [\text{Division durch } b^2]$$

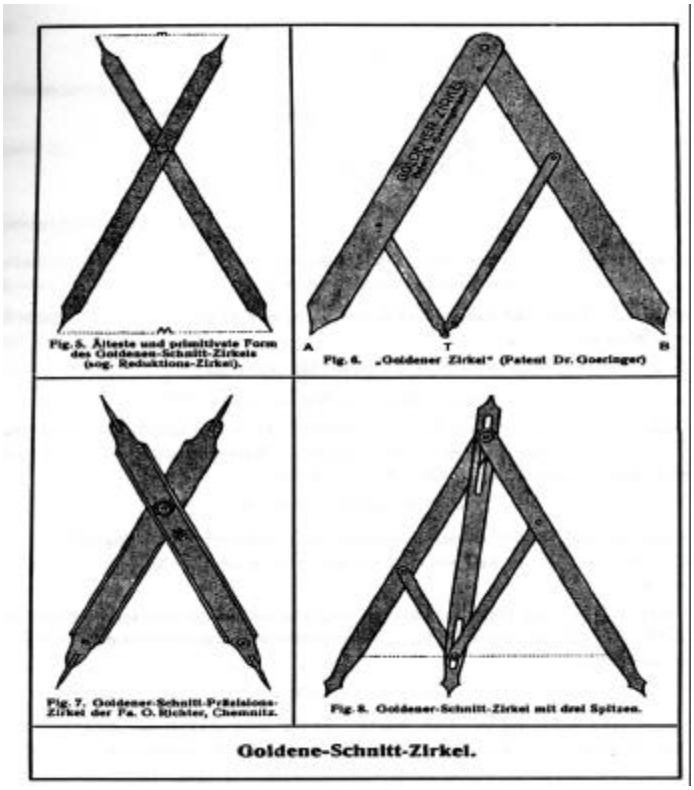
$$\Rightarrow \quad a/b = \tau \qquad [\text{Satz aus Kapitel 2}] \qquad \text{QED.}$$

4. Der goldene Zirkel

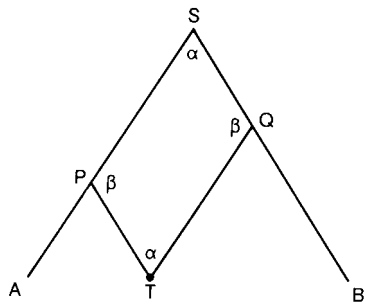
Es gibt mechanische Instrumente, mit deren Hilfe man den goldenen Schnitt einer Strecke bestimmen kann. Auf diese Weise läßt sich natürlich auch nachprüfen, ob ein vorgefundener Punkt eine gegebene Strecke tatsächlich im goldenen Schnitt teilt.
Goldene Zirkel fanden beispielsweise im Schreinerhandwerk in Altertum und Mittelalter häufig Verwendung.
Das einfachste Modell ist sicherlich der sog. **Reduktionszirkel**, der aus zwei gleichlangen Stäben besteht, die in dem Punkt, der beide Stäbe im goldenen Schnitt teilt, beweglich aneinander befestigt sind.
Einen antiken Vorläufer dieses Zirkels hat man bei Ausgrabungen in Pompeji gefunden.



Nach dem *2. Strahlensatz* stellt sich auf der einen Zirkelseite ein Major und auf der anderen der zugehörige Minor ein.
Die folgenden vier Modelle entstammen einem 1919 erschienen Buch[3] über unser Thema.



Interessant ist der Zirkel oben rechts, den wir durch eine Zeichnung schematisieren wollen:



[3] R. ENGELHARDT: Der Goldene Schnitt im Buchgewerbe. Leipzig 1919.

Dieser Zirkel ist so konstruiert, daß
(i) die Punkte P und Q die gleichlangen Schenkel $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ im goldenen Schnitt teilen, und
(ii) |PT| = |PA| sowie |QT| = |QB| gilt.

Zur Abkürzung setzen wir a für die Länge der Schenkel $\overline{AS}$ bzw. $\overline{SB}$. Dann ist

$$|SP| = |QB| = |TQ| \text{ und } |SQ| = |PA| = |PT|.$$

Insbesondere ist also SPTQ ein Parallelogramm. Sei α der Winkel bei S, dann hat auch der Winkel bei T die Größe α. Da die Winkelsumme in jedem Viereck 360° beträgt[4], ergibt sich die Größe des Winkels β im Parallelogramm bei P und Q als $\beta = (360° - 2\alpha)/2 = 180° - \alpha$.
Der Winkel APT hat als Nebenwinkel des Winkels β die Größe $180° - \beta = \alpha$.
Analog gilt: Winkel $TQB = \alpha$. Da ferner |AP| = |PT| und |TQ| = |QB|, sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke ΔAPT und ΔTQB ähnlich.
Bezeichne γ die Größe des Basiswinkels eines dieser beiden Dreiecke, dann gilt
$\gamma + \gamma + \alpha = 180°$, da die Winkelsumme in jedem ebenen Dreieck 180° beträgt.
Hieraus folgt: Die Summe der drei Winkel ATP, PTQ und QTB ist gleich 180°.
Erst aus dieser Erkenntnis ergibt sich, daß die drei Punkte A, T, B wirklich auf einer Geraden liegen.
Hieraus ergibt sich wegen $|AP| = |AS|/(\tau + 1) = a/(\tau + 1) = a/\tau^2$
[Kapitel 2, Satz (5) und Hilfssatz (i)] und $|QB| = |SB|/\tau = a/\tau$ [Kapitel 2, Satz (4)]
die Behauptung $|TB|/|AT| = |QB|/|AP| = \tau$ [Ähnlichkeit der Dreiecke]. QED.

Dieser Zirkel zeigt also wirklich Major und Minor an.

[4] Jedes Viereck läßt sich ja in zwei Dreiecke zerlegen, deren Winkelsumme jeweils 180° beträgt.

5. Das reguläre Fünfeck und der goldene Schnitt

Besonders eindruckvoll tritt der goldene Schnitt bei *regulären Fünfecken* in Erscheinung.

EUKLID führt in seinen **Elementen** den goldenen Schnitt vor allem aus dem Grund ein, um mit seiner Hilfe, das reguläre Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren zu können.

Es gilt historisch als gesichert, daß den Pythagoräern im 5. vorchristlichen Jahrhundert der goldene Schnitt bereits bekannt war.

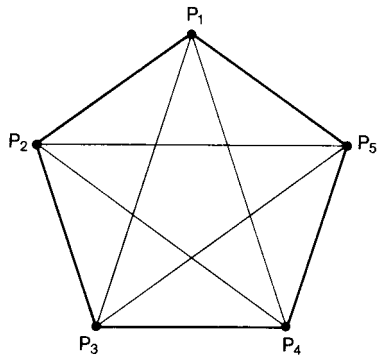
So schreibt der antike Historiker IAMBLICHOS VON CHALKIS (ca. 285 - 330), der Pythagoräer HIPPASOS VON METAPONT - er lebte um 450 v.Chr. und soll ein unmittelbarer Schüler des Pythagoras gewesen sein - habe am regulären Fünfeck, dem Ordenszeichen der Pythagoräer, den goldenen Schnitt entdeckt. Ferner sei ihm die Inkommensurabilität, d.h. die Irrationalität, von Seite und Diagonale am regulären Fünfeck klargeworden.
Diese Entdeckung habe er öffentlich bekanntgemacht, wofür er von den Göttern bestraft wurde und bei einem Schiffsunglück im offenen Meer ertrank.[5]

Interessant ist hieran, daß die Griechen die **Irrationalität** offensichtlich nicht an der Diagonale eines Quadrats entdeckt haben, wie man vermuten sollte, sondern an der Diagonale einer komplizierteren Figur, eben des regulären Fünfecks.

Bevor wir zum eigentlichen Satz dieses Paragraphen kommen, sind einige kleine Vorüberlegungen und Begriffsklärungen notwendig.

Definition:	Ein konvexes n-Eck heißt **regulär**, falls alle seine Seiten die gleiche Länge haben und alle Innenwinkel gleich groß sind. Man nennt hierbei ein n-Eck **konvex**, wenn es die Eigenschaft hat, daß die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte im Innern der Figur selber ganz im Innern liegt.

Beispiel: Ein konvexes Viereck ist genau dann regulär, wenn es ein Quadrat ist. Entsprechend ist ein Dreieck (es ist trivialerweise immer konvex) genau im Falle der Gleichseitigkeit regulär.



reguläres Fünfeck

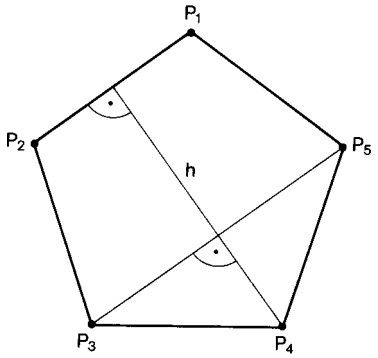
[5] Vgl. IAMBLICHOS: Pythagoras. Legende, Lehre, Lebensgestaltung. Artemis Verlag. Zürich/Stuttgart 1963.

Hilfssatz:	Sei $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ ein reguläres Fünfeck. Dann gilt: (i) Die Größe eines jeden Innenwinkels beträgt 108°. (ii) Alle Diagonalen haben dieselbe Länge. (iii) Jede Seite ist parallel zu der ihr „gegenüberliegenden“ Diagonalen.

Beweis: (i) Jedes beliebige n-Eck läßt sich in n - 2 Dreiecke zerlegen, so daß seine Winkelsumme $(n - 2) \cdot 180°$ beträgt. Ein Fünfeck hat demzufolge eine Winkelsumme von 540°. Da F regulär ist, hat jeder Innenwinkel die gleiche Größe, also $540°/5 = 108°$.

(ii) Aus Symmetriegründen ergibt sich sofort, daß zwei Diagonalen, die eine Ecke von F gemeinsam haben, gleich lang sind. Der Rest folgt durch Induktion: Wegen jeweils einer gemeinsamen Ecke gelten die Gleichungen:
$|P_1P_3| = |P_1P_4|$ und $|P_4P_1| = |P_4P_2|$ und $|P_2P_4| = |P_2P_5|$ und $|P_5P_2| = |P_5P_3|$
und $|P_3P_5| = |P_3P_1|$. Da der Abstand zweier Punkte A und B stets symmetrisch ist, d.h. $|AB| = |BA|$ immer gilt, folgt die Längengleichheit aller Diagonalen.

(iii) O.B.d.A.[6] reicht es, die Behauptung für eine Seite, sagen wir für $\overline{P_1P_2}$, zu zeigen.

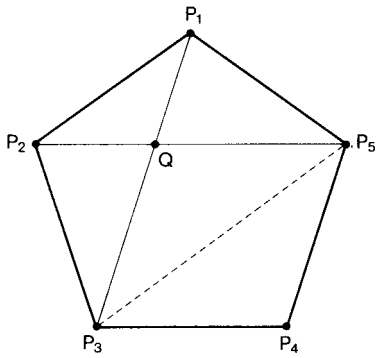


Das Lot h von P_4 auf $\overline{P_1P_2}$ ist eine Symmetrieachse von F. Daher stehen sowohl $\overline{P_1P_2}$ als auch $\overline{P_3P_5}$ senkrecht auf h und sind daher parallel. QED.

Jetzt können wir den folgenden wichtigen Satz beweisen, der für die alten Griechen offenbar den Ausgangspunkt ihrer Beschäftigung mit dem goldenen Schnitt gebildet hat.

Satz:	Sei $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ ein reguläres Fünfeck. Dann gilt: (i) Je zwei Diagonalen, die sich nicht in einer Ecke von F schneiden, teilen einander im goldenen Schnitt. (ii) Das Verhältnis der Länge einer Diagonalen zur Länge der Seite ist τ .

[6] Diese Abkürzung, die man in der Mathematik häufig verwendet, bedeutet: *„ohne Beschränkung der Allgemeinheit“*. Man hat sich bei ihrem Gebrauch stets zu überlegen, **warum** man die Allgemeingültigkeit bei Betrachtung des jeweils gewählten speziellen Falles nicht verletzt. Warum kann man sich hier beim Beweis auf die spezielle Seite $\overline{P_1P_2}$ als **pars pro toto** beschränken ?



Beweis: (i) Wir betrachten den Schnittpunkt Q der Diagonalen $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_5}$.
Da gemäß Hilfssatz (iii) $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_5}$ parallel sind, ergibt sich mit Hilfe des 2. Strahlensatzes:

$$|QP_3|/|QP_1| = |P_3P_5|/|P_1P_2|.$$

Aus der Regularität des Fünfecks ergibt sich weiter $|P_1P_2| = |P_4P_5|$
und gemäß Hilfssatz (ii) ist $|P_3P_5| = |P_1P_3|$, so daß wir erhalten

$$|QP_3|/|QP_1| = |P_1P_3|/|P_4P_5|.$$

Wir haben also nur noch zu zeigen: $|P_4P_5| = |QP_3|$. Hierzu weisen wir nach, daß das Viereck $QP_3P_4P_5$ ein Parallelogramm ist.

Gemäß Hilfssatz (iii) gilt aber $\overline{P_4P_5} \parallel \overline{P_1P_3}$ und daher auch $\overline{P_4P_5} \parallel \overline{QP_3}$.
Analog folgt aus $\overline{P_3P_4} \parallel \overline{P_2P_5}$ auch $\overline{P_3P_4} \parallel \overline{QP_5}$.

Das Viereck $QP_3P_4P_5$ ist also tatsächlich ein Parallelogramm, so daß insbesondere $|P_4P_5| = |QP_3|$ gilt und wir erhalten

$$|QP_3|/|QP_1| = |P_1P_3|/|P_4P_5| = |P_1P_3|/|QP_3|,$$

also die Verhältnisgleichung, die den goldenen Schnitt definiert.

(ii) Gemäß (i) ist $|P_1P_3|/|QP_3| = \tau$,
und nach dem soeben Bewiesenen gilt $|QP_3| = |P_4P_5|$, so daß insgesamt $|P_1P_3|/|P_4P_5| = \tau$ folgt.

QED.

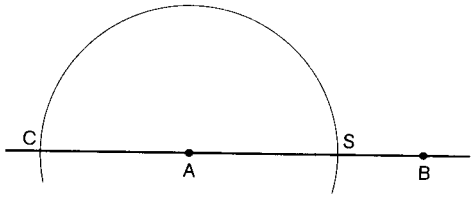
Es erhebt sich nun die naheliegende Frage, wie man eigentlich ein reguläres Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruiert, sofern es denn überhaupt möglich ist.
EUKLID beschäftigt sich im vierten Buch (Aufgabe 11) seiner **Elemente** mit diesem Thema. Er zeigt, daß dieses Problem lösbar ist und gibt eine derartige Konstruktion an.
Als entscheidend erweist sich hierbei die Erkenntnis, daß man zunächst ein goldenes Dreieck zu konstruieren hat. Wir wollen im nächsten Kapitel hierauf kurz eingehen.

6. Das goldene Dreieck und die Konstruktion regulärer Fünfecke

Definition:	Ein Dreieck heißt **golden**, falls es gleichschenklig ist und sich die Länge eines Schenkels zur Länge der Grundseite verhält wie $\tau : 1$.

Ein goldenes Dreieck hat also die Seitenlängen a, τa, τa.

Ist die Seitenlänge a: = |AB| gegeben, dann läßt sich τa leicht folgendermaßen konstruieren:



Zunächst wird der Punkt S, der die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt, gemäß Kapitel 3 konstruiert. Dann zeichnet man den Halbkreis um A mit Radius |AS|, der die Gerade durch A und B im Punkt C schneiden möge. Dann gilt die

Behauptung:	$\|CB\| = \tau\|AB\| = \tau a$, d.h. A teilt $\overline{BC}$ im goldenen Schnitt.

Beweis: Da S die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt, ergibt sich

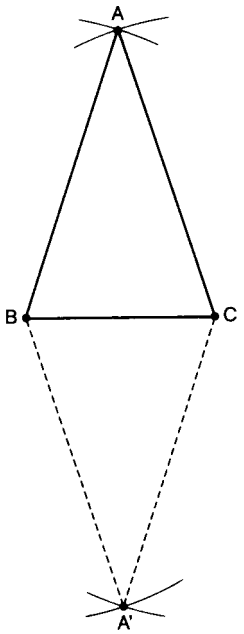
$$|AC| = |AS| = |AB|/\tau.$$

Hieraus folgt

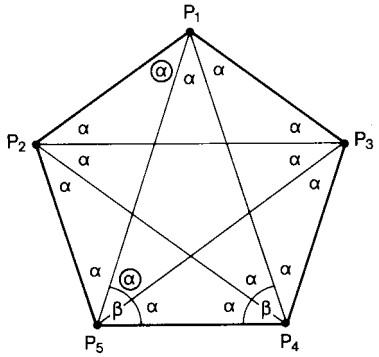
$$|BA|/|AC| = |BA|/(|AB|/\tau) = \tau$$

und damit die Behauptung gemäß Kapitel 2, Satz (2). QED.

Goldene Dreiecke lassen sich also mit dieser Methode recht einfach mit Zirkel und Lineal konstruieren: Zu einer gegebenen Strecke $\overline{BC}$ der Länge a konstruiert man, wie soeben beschrieben, eine Strecke der Länge τa. Die Kreise mit diesem Radius τa um B und C schneiden sich in den Punkten A und A' , so daß sowohl ΔABC als auch ΔA'BC goldene Dreiecke sind, deren Grundseite $\overline{BC}$ die Länge a hat.



In jedem regulären Fünfeck finden sich nun stets fünf kongruente goldene Dreiecke. Ist z.B. $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ ein solches reguläres Fünfeck, dann ist z.B. das Dreick $\Delta P_1P_5P_4$ ein goldenes, da nach dem Satz (ii) des letzten Kapitels jede Diagonale von F das τ-fache der Seitenlänge von F ist.



Ein reguläres Fünfeck mit der Seitenlänge a kann also zusammengesetzt werden aus einem goldenen Dreieck (z.B. $\Delta P_1P_5P_4$) und zwei jeweils gleichschenkligen Dreiecken mit den Seitenlängen a, a, τa (z.B. $\Delta P_1P_3P_4$ und $\Delta P_1P_2P_5$).
Hat man also erst einmal das goldene Dreieck mit Basislänge a konstruiert, so ist der Rest einfach: Die noch fehlenden Punkte P_2 und P_3 erhält man, indem man um P_1 und P_5 sowie um P_1 und P_4 Kreise mit dem Radius a zeichnet. Deren Schnittpunkte sind die Eckpunkte P_2 und P_3.

Da man also ein goldenes Dreieck konstruieren kann, lassen sich auch die Innenwinkel dieses Dreiecks mit Zirkel und Lineal konstruieren; sie betragen 36° und 72°. Dies ist keinesfalls selbstverständlich, sondern eine Folgerung aus dem

Satz:	Die Basiswinkel eines goldenen Dreiecks haben die Größe 72°, während der Winkel an der Spitze die Größe 36° hat.

Umgekehrt ist jedes Dreieck, dessen Winkel die Größen 72°, 72°, 36° haben, ein goldenes.

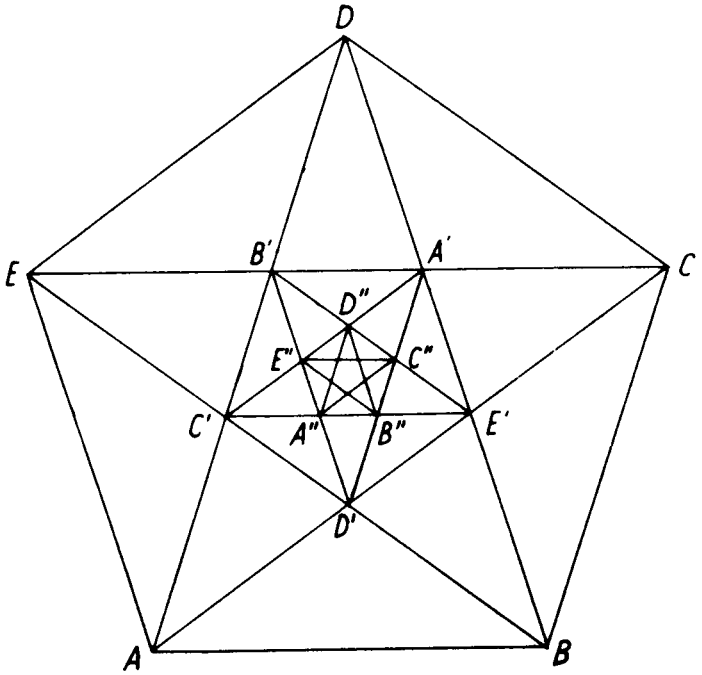
Beweis: Wir zeigen, daß die Basiswinkel β genau doppelt so groß sind wie der Winkel α an der Spitze. Dann haben wir nämlich $5\alpha = 180°$ [Betrachte z.B. $\Delta P_1P_5P_4$], folglich $\alpha = 36°$ und $\beta = 2\alpha = 72°$.

Hierzu denken wir uns das goldene Dreieck in ein reguläres Fünfeck $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ eingebettet. Aus Symmetriegründen haben dann die folgenden fünf Winkel den gleichen Wert α: $\angle P_4P_1P_5$, $\angle P_3P_2P_4$, $\angle P_1P_5P_3$, $\angle P_2P_4P_1$, $\angle P_5P_3P_2$.
Da nun die beiden Geraden P_1P_2 und P_3P_5 parallel sind [Kapitel 5, Hilfssatz (iii)], sind die Winkel $\angle P_1P_5P_3$ und $\angle P_5P_1P_2$ als Stufenwinkel gleich, d.h. es gilt auch $\angle P_5P_1P_2 = \alpha$. Analog zeigt man, daß auch alle anderen Winkel an den fünf Ecken unseres regulären Fünfecks in der Figur den Wert α haben, so daß sofort $\beta = 2\alpha$ folgt.

Hat umgekehrt ein weiteres Dreieck die gleichen Innenwinkel wie ein goldenes, so ist es zu diesem ähnlich, es gelten also die gleichen Seitenverhältnisse, d.h. es ist auch ein goldenes.

QED.

Anmerkung: Betrachtet man die fünf Schnittpunkte der Diagonalen im regulären Fünfeck, so bilden diese wieder ein reguläres Fünfeck im Innern des Ausgangsfünfecks. Beide Fünfecke stehen im Seitenverhältnis des goldenen Schnittes.
Betrachtet man das innere Fünfeck und die Schnittpunkte seiner Seiten, also die Eckpunkte des äußeren Ausgangsfünfecks, dann erhält man ein **Sternfünfeck**, das sog. **Pentagramm**.
Man erhält wiederum ein Pentagramm, das um den Faktor des goldenen Schnittes vergrößert ist, wenn man die Seiten des Ausgangsfünfecks verlängert, bis sie sich schneiden, und so fort.
Man hat also auf diese Weise eine unendliche Folge von um den Faktor τ wachsenden Pentagrammen.



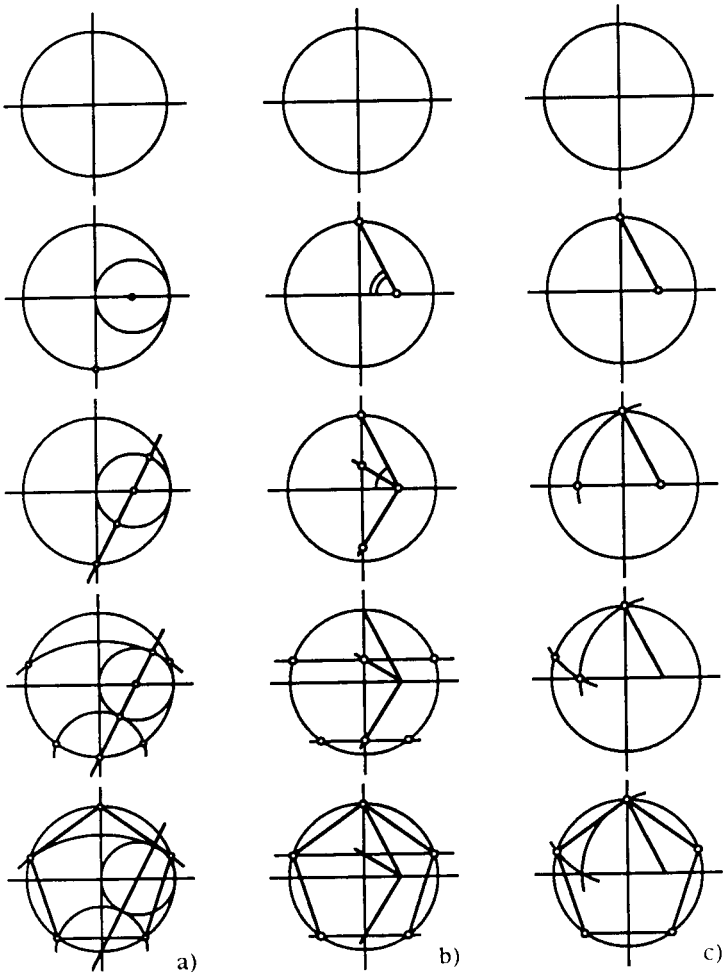
Das Pentagramm diente den Pythagoräern - wie schon erwähnt - als Ordenszeichen ihrer Bruderschaft und spielte daher bei ihnen eine wichtige Rolle. So ist es nicht verwunderlich, wenn sie sich mit seinen Längenverhältnissen befaßt haben und auf diese Weise auf den goldenen Schnitt und seine Konstruktion gestoßen sind.

Über die geheimnisvollen Kräfte und Eigenschaften, die man dem Pentagramm seit den Zeiten der Pythagoräer bis in die Neuzeit zuschrieb, berichtet beispielsweise der große Brockhaus von 1896 unter dem Stichwort **Drudenfuß:**

Drudenfuß, Trudenfuß, Drudenkreuz, Alpfuß, Alpkreuz, Maarfuß, Pentagramm, in der Heraldik Pentalpha, eine aus zwei ineinander verschränkten gleichschenkligen Dreiecken (ohne Basis) gebildete fünfeckige Figur. Die Figur ist zeichnerisch in einem Zuge ausführbar. Der Ursprung dieses mystischen Zeichens verliert sich in das Altertum. Unter den geheimnisvollen Zahlen und Figuren der Pythagoräer findet es sich als Zeichen der Gesundheit. Aus der Schule der Philosophen ging es in das gewöhnliche Leben über. Häufig erscheint das Pentagramm auf griechischen Münzen. Eine hohe Bedeutung erhielt es auch bei den verschiedenen gnostischen Sekten [...]. Im Mittelalter wurde es bei den Zauberformeln gebraucht und sollte eine Herrschaft über die Elementargeister ausüben (vgl. auch Goethes „Faust“ I, Beschwörungsszene). Häufig war es auch das Abzeichen geheimer Gesellschaften.

Drudenfuß wurde es genannt, weil man sich seiner gegen Hexen oder Druden[7] bediente, und noch gegenwärtig [1894] gebraucht der Aberglaube dieses Zeichen, um die Hexen von den Viehställen, Türschwellen, Wiegen, Betten usw. abzuhalten.

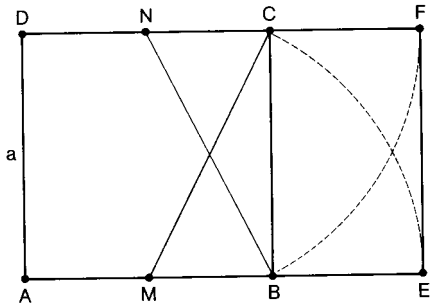
Aufgabe: Man überlege sich, warum die in der folgenden Abbildung angedeuteten drei Konstruktionen wirklich ein reguläres Fünfeck liefern.



[7] **Druden** (Truden), im altdeutschen Volksglauben weibliche Nachtgeister, die die Schlafenden ängstigten, Kinder und Haustiere schädigten und allerlei bösen Zauber trieben, gegen den der Drudenfuß oder auch der Drudenstein, d.i. ein im Wasser rund geriebener Kalkstein mit seinem natürlichen durchgehenden Loch, auch ein Hufeisen, ein Besen vor oder das Kreuzzeichen über der Tür als Schutzmittel dienten. [Brockhaus, 1896].

7. Das goldene Rechteck und goldene Geometrie

Definition:	Ein Rechteck wird **golden** genannt, falls sich die Längen seiner Seiten verhalten wie $\tau : 1$.



Die Konstruktion eines goldenen Rechtecks ist leicht folgendermaßen möglich:

Sei ABCD ein Quadrat. Der Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit Radius |MC| schneidet die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ in einem Punkt E. Entsprechend schneidet der Kreis um den Mittelpunkt N von $\overline{DC}$ die Verlängerung von $\overline{DC}$ auf der Seite von E in einem Punkt F.

Behauptung:	AEFD ist ein goldenes Rechteck.

Beweis: Wir haben zu zeigen: $\overline{AE}$ wird von B im goldenen Schnitt geteilt.
Es sei a: = |AB| die Seitenlänge des Quadrats. Dann gilt:

$|ME| = |MC| = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ [Pythagoras].

Also ist $|AE| = |AM| + |ME| = \frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{5}}{2} = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a \cdot \tau$ QED.

Bemerkung: Aus der Konstruktion des goldenen Rechtecks AEFD ergibt sich bei Betrachtung des kleineren Rechtecks BEFC sofort:
Dieses „abgespaltene“ Rechteck hat die Seitenlängen a und τa - a, so daß sein Seitenverhältnis die Größe $\frac{a}{a(\tau-1)} = \frac{1}{\tau-1} = \tau$ [Kapitel 2, Hilfssatz (ii)] hat.
Das kleinere abgespaltene Rechteck BEFC ist also wiederum ein goldenes.

Wir haben somit die

Aussage:	Jedes goldene Rechteck hat die Eigenschaft, daß nach Abspaltung eines größtmöglichen Quadrats wieder ein goldenes Rechteck übrigbleibt.

Es gilt darüberhinaus die **Umkehrung:** Hat ein Rechteck diese Eigenschaft, bei Abspaltung eines größtmöglichen Quadrats ein goldenes Rechteck übrigzulassen, so ist es selbst ein goldenes.

Beweis: Ein derartiges Rechteck habe die Seitenlängen a und b mit a > b. Dann gilt:
Wenn x die Seite des abgespaltenen Quadrats bezeichne, hat man:

$x = b$ und $\frac{b}{a-x} = \frac{b}{a-b} = \tau$, woraus folgt: $a\tau = b + b\tau = b(1 + \tau)$, so daß $\frac{a}{b} = \frac{1+\tau}{\tau} = 1 + \frac{1}{\tau} = \tau$ [Kapitel 2, Hilfssatz (ii)] gilt. QED.

Wir haben also insgesamt den folgenden Satz bewiesen:

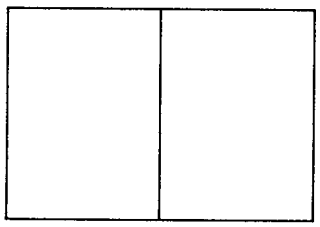
Satz 1: Ein Rechteck ist genau dann ein goldenes, wenn es die Eigenschaft hat, nach Abspaltung eines größtmöglichen Quadrats ein ähnliches, also eines mit gleichem Seitenverhältnis, übrigzulassen.

Man kann also diese Eigenschaft als **definierende Eigenschaft** eines goldenen Rechtecks verwenden.

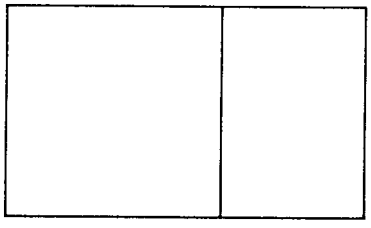
Das goldene Rechteck scheint unser ästhetisches Empfinden sehr zu befriedigen, gilt es doch gemeinhin als besonders „schön“. Man findet es daher an vielen Bauwerken und Gemälden.

Das **DIN-A-Format** hat jedoch - obwohl man es meinen könnte - mit dem goldenen Schnitt nichts zu tun. Seine definierende Eigenschaft ist, bei Halbierung wieder ein DIN-A-Format entstehen zu lassen, so daß man hier die Verhältnisgleichung $a : b = b : \frac{a}{2}$ hat, die mit $a^2 = 2b^2$ gleichbedeutend ist und $a = b\sqrt{2} \approx 1{,}414 \cdot b$ impliziert.

Wie man spätestens dann weiß, wenn man bei einem Computer-Schreib-Programm seine Seite einrichtet, ist bei einem DIN-A4-Blatt $b = 21$ cm und damit $a = 29{,}699$ cm ≈ 30 cm.



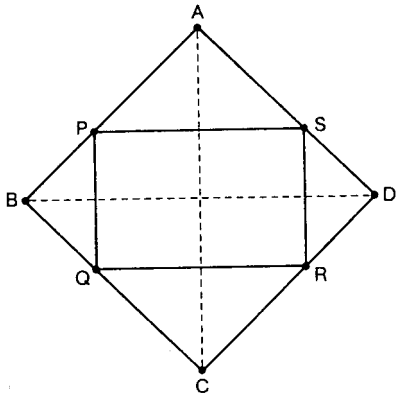
DIN A-Format



Goldenes Rechteck

Recht interessant ist die folgende Aussage:

Satz 2: In ein gegebenes Quadrat ABCD läßt sich ein goldenes Rechteck so einbeschreiben, daß seine Ecken die Seiten des Quadrats im goldenen Schnitt teilen.



Beweis: Wir teilen die Seiten des Quadrats ABCD durch die Punkte P, Q, R, S jeweils im goldenen Schnitt. Nun müssen wir uns zunächst davon überzeugen, daß PQRS tatsächlich ein Rechteck ist. Dies folgt aber sofort aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes: Da nach Konstruktion |AB|/|AP| = |AD|/|AS| gilt, folgt $\overline{PS} \parallel \overline{BD}$. Analog folgt bei Betrachtung der von C ausgehenden Strahlen: $\overline{QR} \parallel \overline{BD}$, insbesondere also $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$. Betrachtet man noch B und D als Strahlenzentren, ergibt sich auf die gleiche Weise: $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. Somit ist PQRS schon einmal als Parallelogramm erkannt.
Da nun aber seine Seiten- eben wegen der Umkehrung des Strahlensatzes - auch parallel zu den Diagonalen des Quadrats ABCD sind und diese bekanntlich aus Symmetriegründen senkrecht aufeinander stehen, muß das Parallelogramm PQRS ein Rechteck sein.
Daß PQRS darüberhinaus auch noch golden ist, erkennt man aus der Tatsache, daß z.B. die beiden Dreiecke ΔAPS und ΔBQP aufgrund gleicher Innenwinkel ähnlich sind, denn hieraus ergibt sich $\frac{|PS|}{|PQ|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \tau$ nach Konstruktion

QED.

Wir kommen noch einmal auf das **Abspalten von Quadraten** - wie bei Satz 1 - zurück.

Die Pythagoräer haben bekanntlich die Existenz des **Irrationalen**[8] in der Mathematik entdeckt, und zwar, wie man vermutet, nicht am Verhältnis der Quadratdiagonalen zur Seite, sondern gerade am goldenen Schnitt[8]. Die Methode, die sie hierfür wahrscheinlich benutzt haben,

[8] Das Wort **„irrational“** in diesem Zusammenhang beruht auf einer schlechten Übersetzung aus dem Griechischen: *a l ogoz* bedeutet eher: *unaussprechbar*. Die lateinische Übersetzung *inkommensurabel*, also *unmeßbar*, kommt dem schon wesentlich näher.
[8] Vgl. J. TROPFKE: Geschichte der Elementarmathematik. Band 1, Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Berlin. 1980. S. 132.

beruht auf dem sog. *euklidischen Algorithmus*, der in den §§1 und 2, Buch VII von EUKLIDs **Elementen** beschrieben wird.
Wir wollen dieses Verfahren - in seinem geometrischen Gewand - kurz erläutern.
Mit Hilfe dieses Algorithmus läßt sich der **größte gemeinsame Teiler** zweier natürlicher Zahlen a und b - wir schreiben ggT(a,b) - sehr schnell berechnen.

Zunächst wird ermittelt, wie oft b in a enthalten ist, indem man a durch b dividiert und den Rest, der kleiner als b ist, ermittelt. Im zweiten Schritt wird b durch diesen Rest dividiert und der neue Rest ermittelt. In jedem weiteren Schritt wird der alte Rest durch den neuen Rest dividiert. Dieses Verfahren wird solange fortgeführt, bis die Division „aufgeht“, d.h. bis kein Rest mehr übrigbleibt. Der letzte von Null verschiedene Rest ist dann der größte gemeinsame Teiler von a und b.

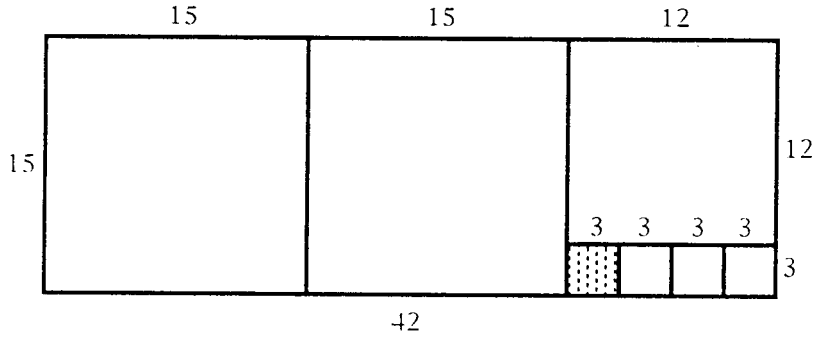
Wir nehmen uns ein **Beispiel** vor: Sei a = 42 und b = 15.

Dann liefert der **euklidische Algorithmus:**
42 : 15 = 2 Rest 12
15 : 12 = 1 **Rest 3**
12 : 3 = 4 Rest 0.

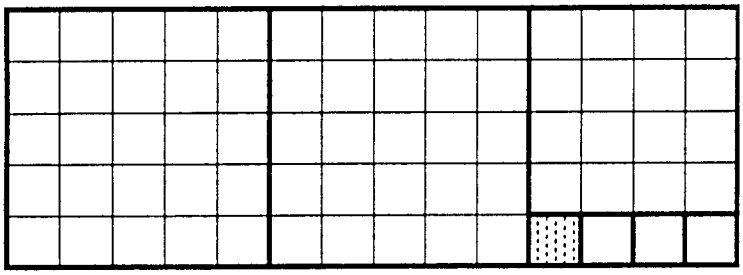
Es ist also ggT(42, 15) = 3.

Geometrisch läßt sich das Verfahren folgendermaßen darstellen:

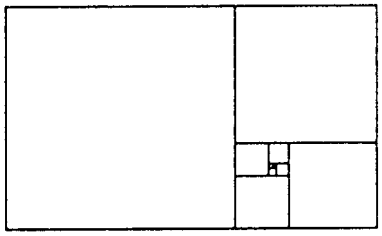
Von einem Rechteck der Seitenlängen a und b (a > b) werden Quadrate der Seitenlänge b abgeschnitten, solange es geht. Dann bleibt ein Restrechteck übrig, von welchem wieder Quadrate abgeschnitten werden und so weiter. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis das Zerlegen in Quadrate aufgeht, das heißt, kein Rechteck mehr übrigbleibt. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrats ist dann der größte gemeinsame Teiler von a und b:



Da somit diese kleinste Quadratseite - hier mit der Länge 3 - ein gemeinsames Maß (sogar das größte) der ursprünglichen Rechteckseiten a und b ist, kann nun das ganze Rechteck in Quadrate dieser Größe unterteilt werden, d.h. a und b sind kommensurabel (ihr Verhältnis ist eine rationale Zahl):



Wenden wir nun den euklidischen Algorithmus auf das **goldene Rechteck** mit den Seitenlängen a = τ und b = 1 an, so bricht das Verfahren nie ab, da ja gemäß Satz 1 - immer nach Abschneiden eines Quadrats jeweils ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck übrigbleibt. Die Seitenlängen τ und 1 haben also kein gemeinsames Maß, das Verhältnis $\tau : 1 = \tau$ kann nicht als ganzzahliges Verhältnis angegeben werden. τ ist also, nach unserem modernen Sprachgebrauch, eine irrationale Zahl.



Bemerkung : An der Figur erkennt man, daß die unendliche Folge der abgeschnittenen Quadrate das ganze goldene Rechteck mit der Flache τ ausschöpft, d.h. da die Quadrate die Seitenlängen 1, $\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau^2}, \frac{1}{\tau^3}, \ldots$ haben, muß gelten:

$$1 + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^4} + \frac{1}{\tau^6} + \ldots = \tau$$

Oder in präziser mathematischer Schreibweise: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2i}} = \tau$.

Es handelt sich hier um die bekannte geometrische Reihe, für die gilt:

($\star$) $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$, sofern nur $|q| < 1$. Mit $q = \frac{1}{\tau^2}$ folgt wegen $|\frac{1}{\tau^2}| < 1$ aus dieser Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2i}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\tau^2}} = \frac{\tau^2}{\tau^2-1} = \frac{\tau^2}{\tau} = \tau .$$

Bemerkung: Die Summenformel ($\star$) für die geometrische Reihe ist für die Analysis von erheblicher Bedeutung, so daß man ihre Herleitung kennen sollte. Da der „Trick“ sehr einfach ist, sei er hier kurz vorgeführt:

Wir schreiben die endliche geometrische Summe aus:

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + ... + q^{n-1} + q^n \qquad = s_n \mid \cdot q$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} q^i = \qquad q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + ... + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} = s_n q$$

(i) - (ii) liefert: $1 \qquad - q^{n+1} = s_n(1 - q)$

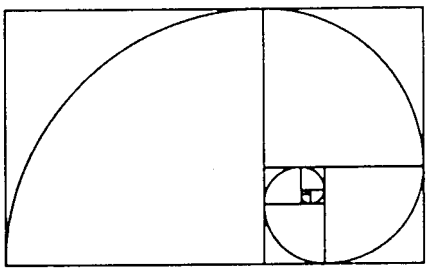
hieraus folgt: $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$, da dann

$q^{n+1} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. QED.

Zeichnet man in die Quadrate der Unterteilung des goldenen Rechtecks bei obiger Abbildung in geeigneter Weise Viertelkreise ein, so erhält man eine Spirale, die sog. **goldene Spirale**, die **unendlich** viele Windungen besitzt, jedoch eine **endliche** Länge hat, nämlich:

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^3}+\frac{1}{\tau^4}+ \quad ... \quad\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\tau}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\tau}{\tau-1} = \frac{\pi}{2}\cdot\tau^2 = \frac{\pi}{2}\cdot(\tau+1)$$

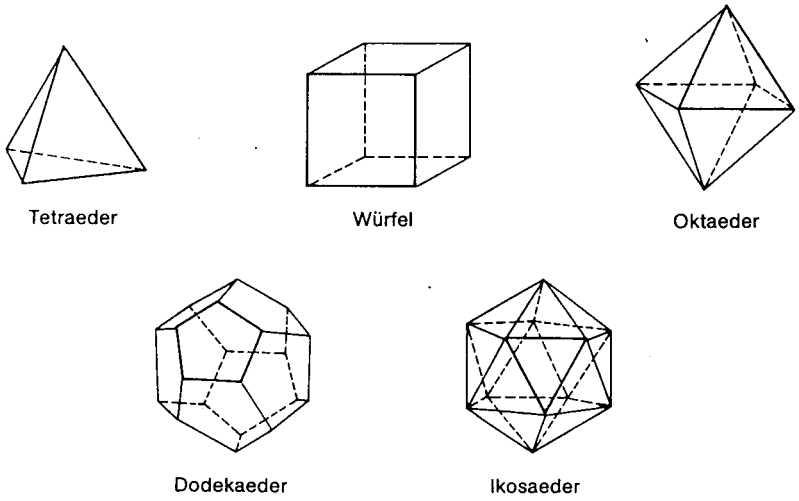
[Kapitel 2, Hilfssatz (ii),(i)].



Bei jeder eingehenderen Untersuchung des goldenen Schnittes darf man nicht versäumen, zumindest ein kurzes Streiflicht auf ein weiteres großes Thema der antiken Geometrie zu werfen, auf die fünf sogenannten **Platonischen Körper**.

Diese regulären Körper wurden schon von EUKLID im 13. Buch seiner **Elemente** behandelt.

Für PLATON spielen sie in seinem *Timaios* eine wichtige Rolle dadurch, daß er vieren dieser Körper die vier antiken Elemente zuordnet, aus denen nach antiker Auffassung der Kosmos besteht, nämlich Erde, Feuer Luft und Wasser. Der fünfte Körper, es ist das Dodekaeder, stellt das gesamte Weltall dar, es ist die „**Quintessenz**“.



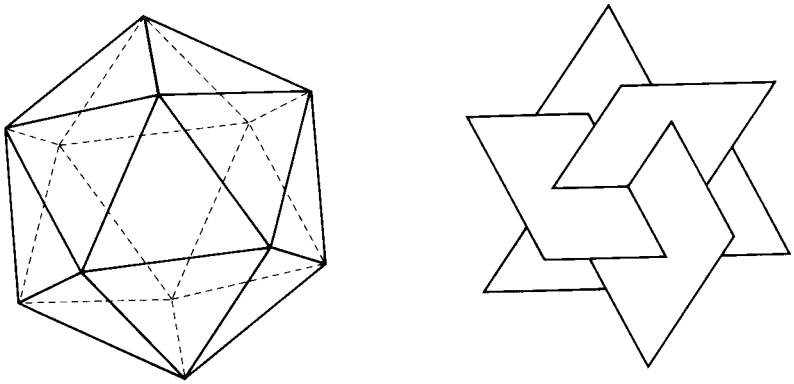
Das besondere Kennzeichen der platonischen Körper ist es, daß ihre Oberflächen aus jeweils kongruenten regulären Vielecken bestehen.
Euklid zeigt, daß es nur diese fünf regulären Körper geben kann.

Wir fassen die jeweiligen Charakteristika der fünf platonischen Körper in folgender Tabelle zusammen:

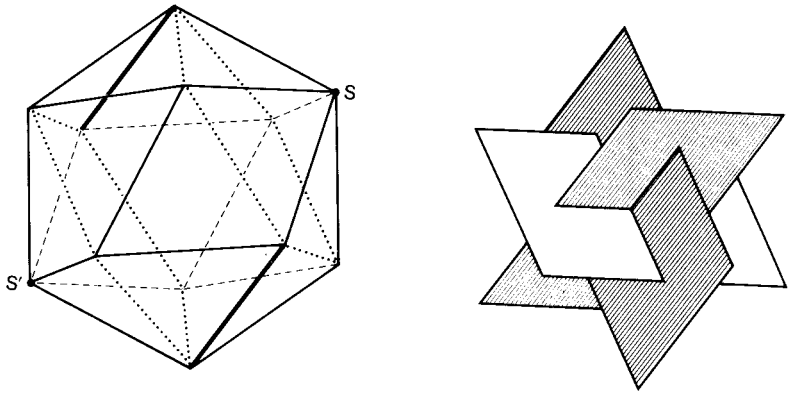
	Anzahl der Flächen an jeder Ecke	Anzahl der Ecken pro Fläche	Gesamtzahl der Ecken	Gesamtzahl der Kanten	Gesamtzahl der Flächen
Tetraeder	3	3	4	6	4
Würfel	3	4	8	12	6
Oktaeder	4	3	6	12	8
Dodekaeder	3	5	20	30	12
Ikosaeder	5	3	12	30	20

Am Ikosaeder, dem regulären Zwanzigflach, läßt sich der folgende interessante Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt ausmachen:

Satz 3: Die zwölf Ecken eines Ikosaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.



Beweis: Die Dreiecke, die an eine Ecke des Ikosaeders (z.B. S oder S') angrenzen, gehören zu einer Pyramide, deren Basis ein reguläres Fünfeck ist:

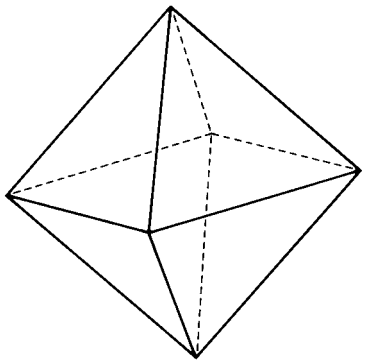


Je zwei gegenüberliegende Kanten des Ikosaeders - wie beispielsweise die fett gezeichneten - gehören zu einem Rechteck, dessen längere Seite Diagonale eines solchen Fünfecks ist. Nach Kapitel 5, Satz (ii) ist das Verhältnis dieser Diagonale - also dieser Rechtecksseite - zur Seite des Fünfecks - also zur Kante des Ikosaeders - gleich τ, so daß das Rechteck ein goldenes ist. In den beiden hierzu senkrechten Ebenen erhält man analog die beiden anderen goldenen Rechtecke.

QED.

Wie sieht es in Bezug auf den goldenen Schnitt mit den anderen platonischen Körpern aus ?

Betrachten wir das Oktaeder

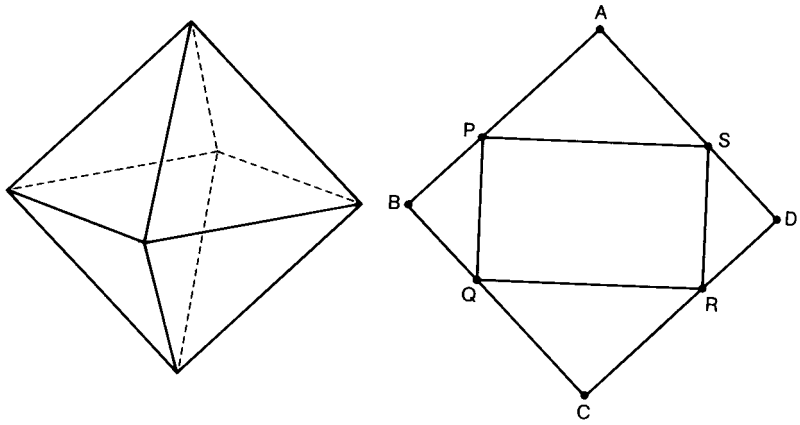


Wie man der Figur entnimmt, gilt:

Die sechs Ecken des **Oktaeders** sind genau die **Ecken dreier paarweise senkrecht aufeinanderstehender Quadrate**. Darüber hinaus gilt beim Oktaeder sogar noch:
Die zwölf Seiten der drei Quadrate sind genau die Kanten des Oktaeders.

Satz 4: In jedes Oktaeder kann ein Ikosaeder so einbeschrieben werden, daß dessen Ecken die Kanten des Oktaeders im goldenen Schnitt teilen.

Beweis: Es dürfte den meisten Menschen nicht leicht fallen, sich ein Ikosaeder innerhalb eines Oktaeders plastisch vorzustellen, so daß man geneigt ist, anzunehmen, der Beweis werde relativ aufwendig ausfallen. In Wahrheit haben wir aber lediglich Satz 2 und Satz 3 miteinander zu kombinieren und mit unserer Vorbemerkung über das Oktaeder in Verbindung zu bringen:[9]
Die zwölf Ecken des Ikosaeders sind die Ecken dreier ineinandergesteckter, paarweise senkrechter goldener Rechtecke [Satz 3], die nach obiger Vorbemerkung nun in drei paarweise senkrechte Quadrate einbeschrieben werden sollen.
O.B.d.A. reicht es, das Problem nur in einer der drei Ebenen zu betrachten:
Wir haben dort also ein goldenes Rechteck so in ein Quadrat einzubeschreiben, daß es dessen Kanten im goldenen Schnitt teilt. Daß und wie dies möglich ist, sagt aber gerade der Satz 2 (incl. Beweis).



QED.

Betrachten wir noch einmal die Tabelle auf Seite 22 genauer, werden wir entdecken, daß eine **Dualität** zwischen den Körpern besteht in dem Sinne, daß der eine aus dem anderen hervorgeht, wenn man jeweils die Ecken des einen mit den Flächen des anderen vertauscht.

In diesem Sinne sind Dodekaeder und Ikosaeder sowie Würfel und Oktaeder zueinander **dual**. Das Tetraeder ist zu sich **selbst dual** (bei Vertauschung von Ecken und Flächen geht es in sich selbst über).

Geometrisch bedeutet die Dualität beispielsweise zwischen **Dodekaeder** und **Ikosaeder**, daß die Mittelpunkte der Fünfecksflächen eines Dodekaeders genau die Ecken eines Ikosaeders bilden.
Hieraus folgt aufgrund von Satz 3 sofort:

Satz 5: Die zwölf Mittelpunkte der Fünfecksflächen eines Dodekaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke, die in paarweise senkrechten Ebenen liegen.

[9] Man kann an diesem Beispiel übrigens wieder einmal schön den „Triumph“ der mathematischen Logik über die (räumliche) Anschauung erkennen.

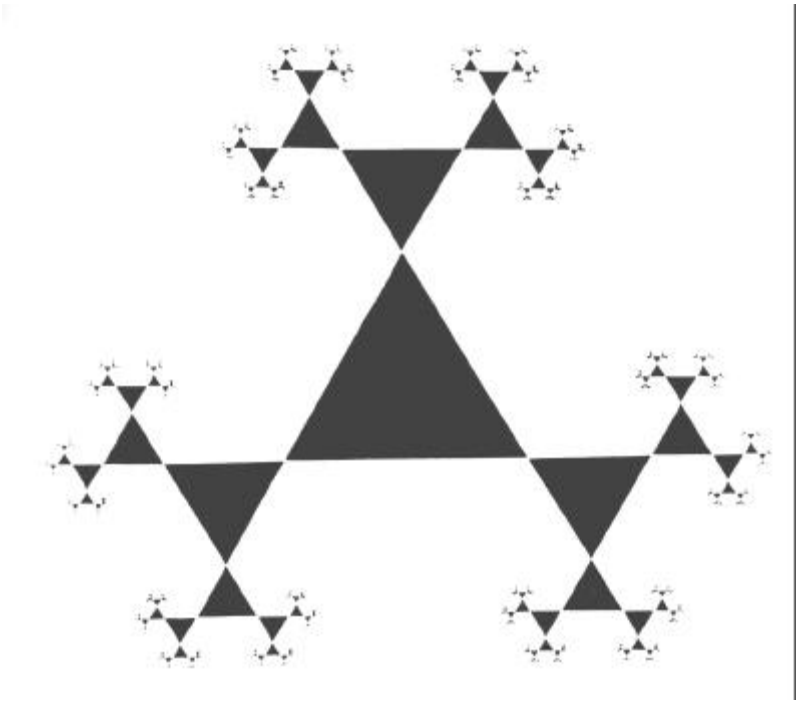
Auch hier zeigt sich wieder die große Überlegenheit allgemeiner Argumentationen. Der Versuch, diesen Satz sich allein durch räumliche Vorstellung plausibel zu machen, dürfte hingegen nicht ganz einfach sein!

Bei unserem Streifzug durch die goldene Geometrie wollen wir auch noch kurz einen Blick auf aktuelle mathematische Entwicklungen werfen.
Wohl kaum ein anderes Gebiet moderner Mathematik ist derzeit so populär wie die Theorie der Fraktale. Erstaunlicherweise begegnet uns auch hier auf mannigfache Weise der goldene Schnitt.

Definition: Unter einem **Fraktal** versteht man eine geometrische Figur, die auf die folgende Weise entsteht:

Ausgangspunkt ist eine einfache geometrische Grundfigur, z.B. ein Dreieck oder ein Quadrat. An die Ecken dieser Figur werden gleichartige Grundfiguren gezeichnet, die um einen bestimmten Faktor $f < 1$ gegenüber der Ausgangsfigur verkleinert sind. An deren freien Ecken wird dieser Vorgang dann wiederholt, und so fährt man ad infinitum fort. Bei jedem Iterationsschritt erhält man auf diese Weise immer feinere Verästelungen.

Das folgende Bild zeigt ein Dreiecksfraktal, das aus gleichseitigen Dreiecken gebildet wurde:

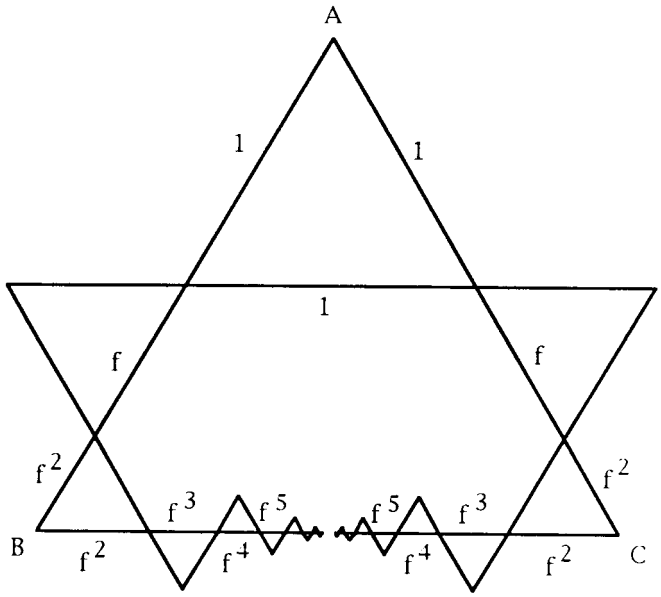


Bei diesem Fraktal wurde der Verkleinerungsfaktor $f = \frac{1}{2}$ gewählt.

Man sieht deutlich, daß die Äste dieses Dreieckfraktals einen relativ großen **Zwischenraum** offen lassen.
Es erhebt sich daher die interessante Frage, wie groß wir wohl den Verkleinerungsfaktor $f < 1$ wählen müssen, damit sich die einzelnen Zweige gerade **berühren**, aber noch nicht überlappen.

Aus Gründen der Symmetrie reicht es, nur einen Berührungspunkt zu betrachten. Wir wählen den Punkt direkt in der Mitte unterhalb des Ausgangsdreiecks, dessen Seitenlänge wir o.B.d.A. als 1 voraussetzen, und betrachten die beiden Dreiecksfolgen, die sich von links und rechts diesem Punkt nähern und sich im Grenzfall dort berühren sollen.
Die iterierten Dreiecke haben dann die Seitenlängen $f, f^2, f^3, f^4, \ldots$
Der Figur entnimmt man, daß die Bedingung der Berührung der beiden Dreiecksfolgen in der Mitte gerade die Gültigkeit folgender Gleichung bedeutet:

$$\frac{1}{2} + \frac{f}{2} = \frac{f^2}{2} + f^3 + f^4 + f^5 + \ldots$$



Obige Gleichung ist äquivalent zu

$1 + f = f^2 + 2f^3 \cdot (1 + f + f^2 + f^3 + \ldots) = f^2 + \frac{2f^3}{1-f}$ [Summenformel (✶) für die geometrische Reihe] .

Hieraus ergibt sich die kubische Gleichung: $f^3 + 2f^2 - 1 = 0$

Die eine Lösung $f_1 = -1$ läßt sich unschwer erraten.

Division durch den zugehörigen Linearfaktor (f + 1) liefert für die übrigen Lösungen die quadratische Gleichung:

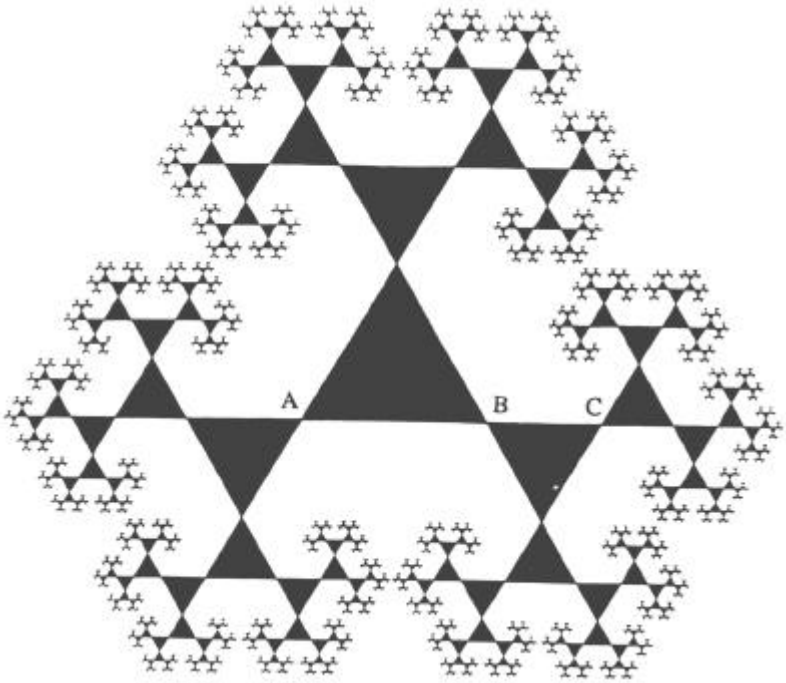
$$f^2 + f - 1 = 0$$

mit den Lösungen $f_2 = -\tau$ und $f_3 = \frac{1}{\tau}$.

Die einzige positive Lösung der kubischen Gleichung ist also $f = \frac{1}{\tau}$.

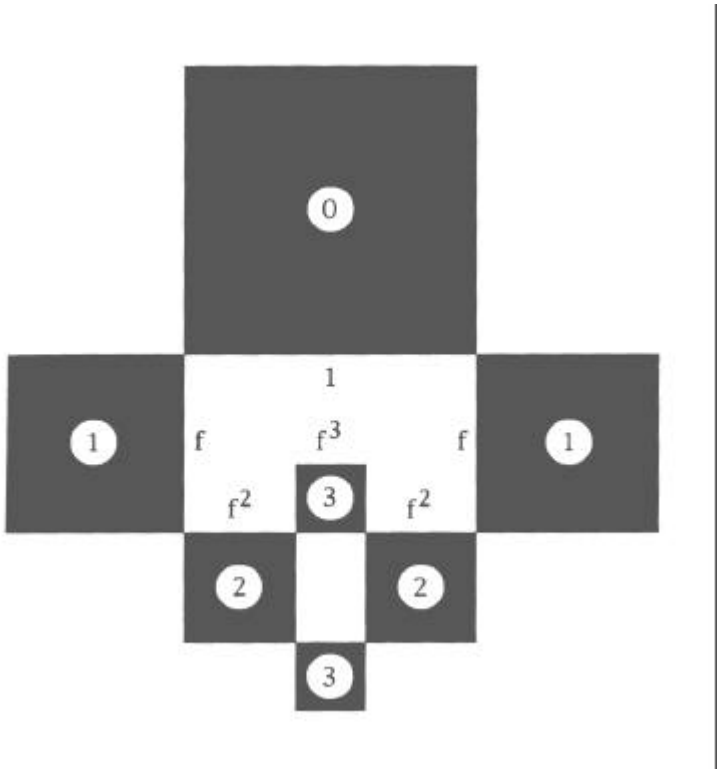
Wir haben also das „schöne“ Ergebnis erhalten:

Satz 6: Bei Verkleinerung im Verhältnis des goldenen Schnittes ($f = \frac{1}{\tau}$) berühren sich gerade die einzelnen Äste eines Dreiecksfraktals.



Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir allein die Ästhetik einiger Fraktale genießen, die alle einen Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt aufweisen.

Das **goldene Quadratfraktal**, das nach folgendem Iterationsprinzip aufgebaut ist:

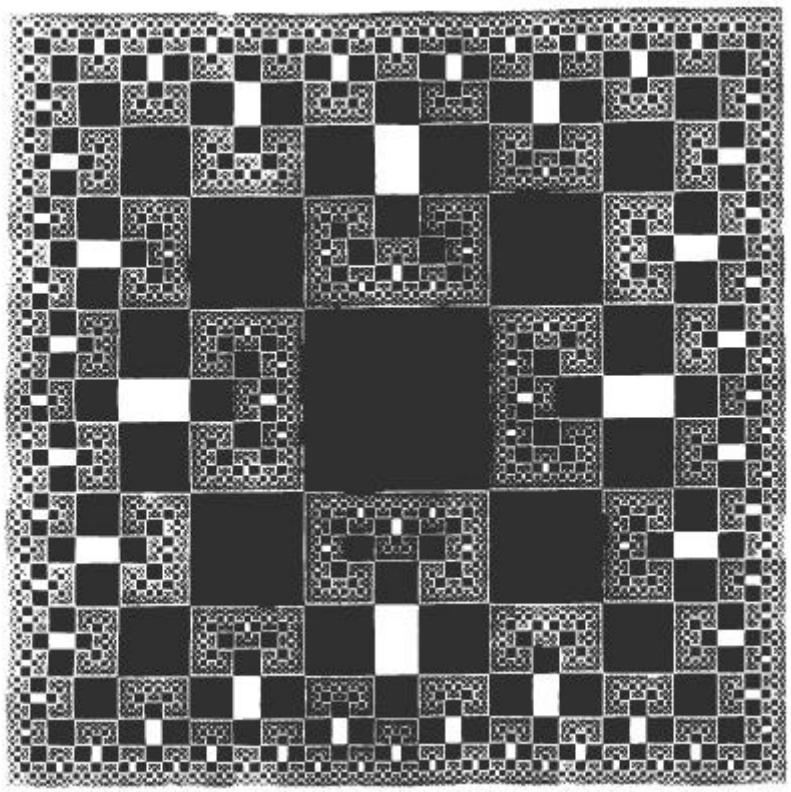


Für den Verkleinerungsfaktor ergibt sich - gemäß Figur - die Bedingung

$$1 = 2f^2 + f^3 .$$

Es ist dieselbe kubische Gleichung, die wir vom goldenen Dreiecksfraktal schon kennen und die die einzige positive Lösung $f = \frac{1}{\tau}$ besitzt.

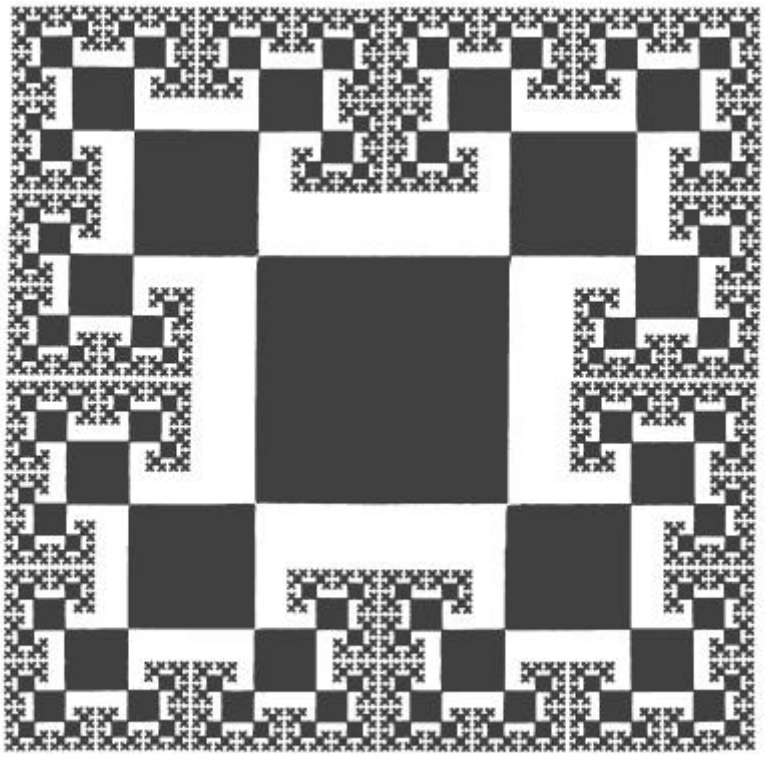
Das **goldene Quadratfraktal** hat folgendes Aussehen:



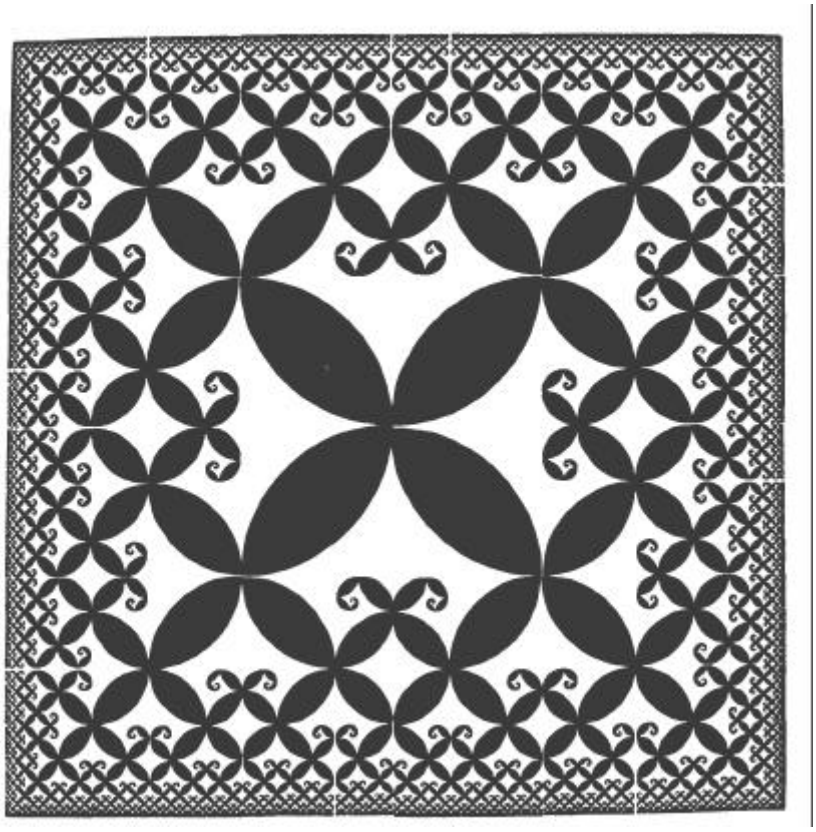
Die ausgesparten weißen Rechtecke sind golden.

Auch bei diesem Fraktal berühren sich die einzelnen Äste, so daß in diesem „Teppichmuster“ keine „Zwischenräume“ (Räume ohne Muster) frei bleiben.

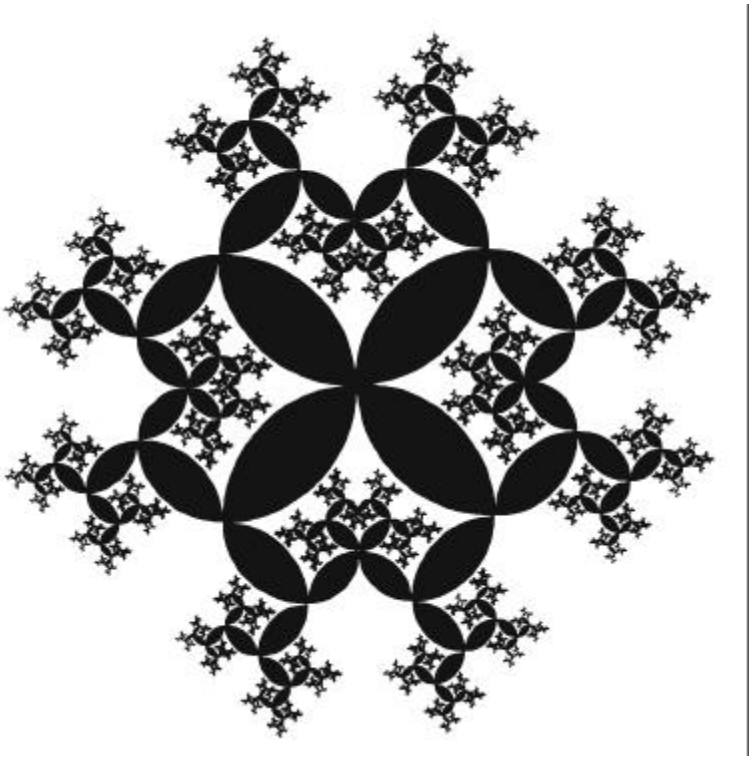
Der Vergleich mit dem Quadratfraktal mit Verkleinerungsfaktor $f = \frac{1}{2}$, bei dem es diese „Zwischenräume“ gibt, zeigt sehr deutlich, daß das „kompaktere“ goldene Fraktal ästhetisch ansprechender ist:



Sehr ansprechend ist auch die **Variante des goldenen Quadratfraktals**, die man erhält, indem man die entsprechenden Kreiszweiecke in die Quadrate einzeichnet:



Zum Abschluß genießen wir ein **Fraktal mit goldenen Spiralen:**



Trinkt, ihr Augen, was die Wimper hält,
von dem goldnen Überfluß der Welt!

G. KELLER

8. Der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen

In Kapitel 2 (Seite 4) hatten wir versprochen, noch einmal genauer auf die bemerkenswerte Eigenschaft der **goldenen Schnittzahl** τ zurückzukommen, daß sie es nämlich gestattet, alle ihre positiven und negativen Potenzen in **linearer Form** $a\tau + b$ mit geeigneten ganzzahligen a und b zu schreiben.

Gemäß Kapitel 2, Hilfssatz (i) gilt ja für τ die definierende Gleichung: $\tau^2 = \tau + 1$.

Hieraus ersieht man, daß das Quadrat von τ **linearisierbar** ist, eben durch $\tau + 1$.

Untersuchen wir weiter: $\tau^3 = \tau^2 + \tau$ [Multiplikation von $\tau^2 = \tau + 1$ mit τ].

Durch Einsetzen von $\tau + 1$ in τ^2 erhalten wir die **Linearisierung:**

$$\tau^3 = (\tau + 1) + \tau = 2\tau + 1 .$$

Allgemein erhalten wir aus der Grundgleichung $\tau^2 = \tau + 1$ durch Multiplikation mit τ^n $(n \in \mathrm{IN})$[10] die **Rekursionsgleichung:**

$$\boxed{\tau^{n+2} = \tau^{n+1} + \tau^n \ .}$$

Kennt man die linearen Ausdrücke für τ^n und τ^{n+1}, so kann man den linearen Ausdruck für die nächste Potenz τ^{n+2} einfach erzeugen durch Addition.

Mit Hilfe dieser Rekursionsgleichung erhalten wir sukzessive die Linearisierungen der Potenzen von τ :

$\tau^1 = \tau \qquad = \tau$

$\tau^2 = \tau + 1 \qquad = \tau + 1$

$\tau^3 = \tau^2 + \tau \qquad = 2\tau + 1$

$\tau^4 = \tau^3 + \tau^2 \qquad = 3\tau + 2$

$\tau^5 = \tau^4 + \tau^3 \qquad = 5\tau + 3$

$\tau^6 = \tau^5 + \tau^4 \qquad = 8\tau + 5$

....

Wie man sofort erkennt, ist die neue Zeile jeweils die Summe der beiden vorhergehenden. Diese Linearisierung der Potenzen des goldenen Schnitts τ war schon LEONHARD EULER[11] bekannt.

---

[10] Das Symbol IN bedeutet die Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

[11] 1707 (Basel) - 1783 (St. Petersburg). Großer Mathematiker, der den größten Teil seines Lebens an der von der Kaiserin KATHARINA I. gegründeten Wissenschaftlichen Akademie in St. Petersburg verbrachte. Er war einer der fleißigsten Mathematiker, die je gelebt haben. Sein Œvre umfaßt über 600 bedeutende Veröffent-

Die Potenzen von τ lassen sich also schreiben in der Form

$\tau^n = a_n \tau + a_{n-1}$ mit $n \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Für die ganzen Zahlen a_n gilt offensichtlich die **Rekursion**:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ mit den Startwerten } a_1 = a_2 = 1$$

Die hierdurch rekursiv - man sagt auch induktiv - definierte Zahlenfolge ist in der Mathematik sehr berühmt. Sie heißt die **Fibonacci-Folge**[12].

Ihre ersten Folgenglieder lauten: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, . . .

Die Fibonacci-Zahlen treten also bei der Linearisierung der Potenzen von τ auf.

Da nach Kapitel 2, Hilfssatz (ii) gilt $1/\tau = \tau - 1$, erhält man mit $\tau^2 = \tau + 1$:
$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = (\tau - 1)^2 = \tau^2 - 2\tau + 1 = (\tau + 1) - 2\tau + 1 = -\tau + 2 = (-\frac{1}{\tau} - 1) + 2 = -\frac{1}{\tau} + 1$, so daß wir haben:

$$\left(-\frac{1}{\tau}\right)^2 = (-\frac{1}{\tau}) + 1$$

Diese Gleichung geht aus der Gleichung $\tau^2 = \tau + 1$ hervor, indem man τ durch $-\frac{1}{\tau}$ ersetzt, so daß die gleiche obige Argumentation auch für $-\frac{1}{\tau}$ gelten muß und wir auch für die Potenzen von $-\frac{1}{\tau}$ die Linearisierungsformel

$\left(-\frac{1}{\tau}\right)^n = a_n(-\frac{1}{\tau}) + a_{n-1}$ für $n \in \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$ erhalten mit der Fibonacci-Folge (a_n).

Kombiniert man diese Formel mit der Linearisierung $\tau^n = a_n \tau + a_{n-1}$, erhält man sofort

---

lichungen aus Analysis, Algebra, Geometrie und Mechanik. Trotz völliger Erblindung im Jahr 1766 publizierte er noch zahlreiche Arbeiten, die er seinem Diener, einem Berliner Schneidergesellen, diktierte. EULER schrieb seine Werke in einer didaktisch so hervorragenden Weise, daß dieser Schneidergeselle - angeblich - alles genau verstanden und schließlich selber ein mathematisch recht gebildeter Laie geworden sein soll.

[12] Nach Fibonacci = Filius Bonacci = Sohn des Bonacci. Sein eigentlicher Name war LEONARDO VON PISA. Geboren wurde er zwischen 1170 und 1180 in Pisa. Sein Todesjahr ist unbekannt. Auf ausgedehnten Reisen nach Algerien, Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und in die Provence lernte er alle damals bekannten Rechenverfahren kennen. 1202 veröffentlichte er ein epochemachendes 459 Seiten starkes mathematisches Werk, den **Liber Abbaci**. Dieses Lehrbuch wurde ein Markstein in der Entwicklung der Mathematik des Mittelalters. Hier wird u.a. erstmalig konsequent die indisch-arabische Ziffernschreibweise verwendet. Er hatte Zugang zu den Kreisen des Kaisers FRIEDRICH II., der ihm die Aufgabe gestellt haben soll, eine Quadratzahl zu finden, die bei Addition und Subtraktion von 5 wieder Quadratzahlen liefert.

$\tau^n - (-\frac{1}{\tau})^n = a_n(\tau + \frac{1}{\tau}) = a_n\sqrt{5}$ [Kapitel 2, Hilfssatz (iii)] .

Hieraus ergibt sich eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - (-\frac{1}{\tau})^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Diese Formel wird die **Binet-Formel**[13] genannt. Bemerkenswert an ihr ist, daß sich für jedes natürliche n die irrationalen Terme gegenseitig so aufheben, daß stets eine natürliche Zahl „zum Vorschein“ kommt.

Wir erkennen weiter: Die Fibonacci-Folge ist die Differenz zweier **geometrischer Folgen**[14] mit den Quotienten τ respektive $-\frac{1}{\tau}$.

Da nun $|-\frac{1}{\tau}| < 1$ ist, ist die Folge $-(-\frac{1}{\tau})^n$, $n \in$ IN, eine Nullfolge, so daß wir für *große n* die folgende **Approximation für die Fibonacci-Zahlen** haben:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\tau^n \qquad \text{für große n.}$$

Die Fibonacci-Zahlen werden also immer genauer durch Potenzen des goldenen Schnitts angenähert, je größer sie werden.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \tau$$

Der goldene Schnitt läßt sich also umgekehrt auch aus den Fibonacci-Zahlen gewinnen, nämlich nach der letzten Formel als Approximation durch die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Die folgende kleine Tabelle illustriert diese Annäherung bis zum sechsten Iterationsschritt:

$a_1 = 1$	$f_1 := a_2/a_1 = 1$
$a_2 = 1$	$f_2 := a_3/a_2 = 2$

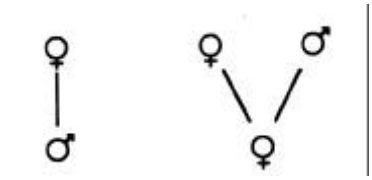
[13] JACQUES PHILIPPE MARIE BINET. 1786 (Rennes) - 1856 (Paris). Physiker, Astronom, Mathematiker. Er lehrte an der Pariser Ecole Polytechnique, wo er vom Lehrer bis zum Professor für Mechanik aufstieg. Die nach ihm benannte Formel soll aber schon 1718 von ABRAHAM DE MOIVRE (1667 - 1754) entdeckt worden sein. Dieser war ein hochgebildeter mathematischer Autodidakt, der sich bis ins hohe Alter seinen Lebensunterhalt durch mathematischen Privatunterricht sowie durch profunde mathematische Beratung von Spielern und Spekulanten der damaligen Londoner High Society verdiente. Er hat wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie beigetragen. Exakt bewiesen hat die Formel zehn Jahre später NIKOLAUS BERNOULLI (1687 - 1759).

[14] Eine Folge (a_n) heißt eine **geometrische Folge**, wenn sie die Gestalt $a_n = q^n$ hat, wenn also zwei aufeinanderfolgende Glieder stets den gleichen Quotienten haben: $a_{n+1}/a_n = q$.

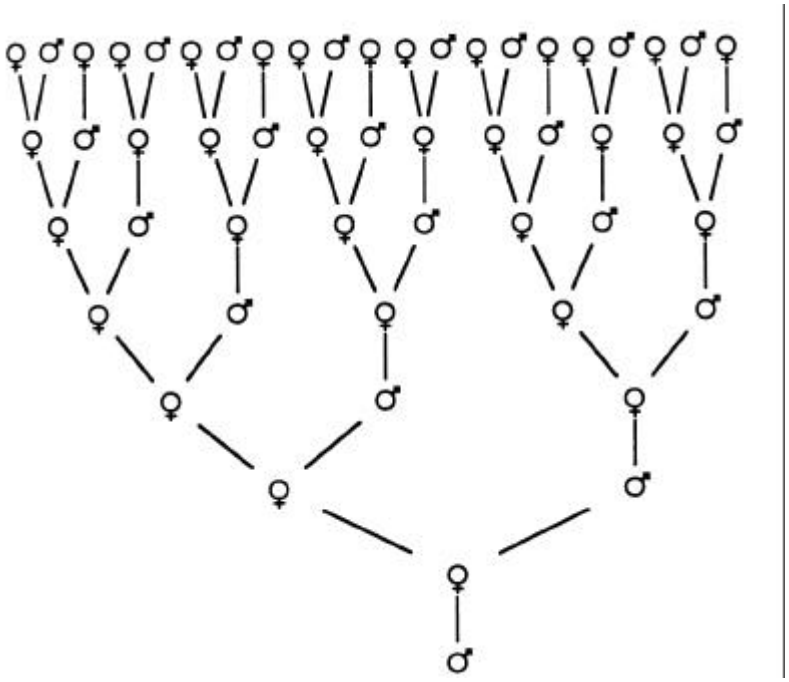
$a_3 = 2$	$f_3 := a_4/a_3 = 3/2 = 1{,}5$
$a_4 = 3$	$f_4 := a_5/a_4 = 5/3 = 1{,}666$
$a_5 = 5$	$f_5 := a_6/a_5 = 8/5 = 1{,}6$
$a_6 = 8$	$f_6 := a_7/a_6 = 13/8 = 1{,}625$

In der **Biologie** begegnet uns die Fibonacci-Folge ganz konkret bei den **Bienen**. Hier schlüpfen bekanntlich die männlichen Bienen, die sog. **Drohnen**, aus dem *unbefruchteten* Ei einer Bienenkönigin, während aus den befruchteten Eiern die Königinnen oder die weiblichen Arbeitsbienen schlüpfen. Welche weibliche Biene Königin wird, hängt von der Ernährung ab. Eine Drohne hat also nur ein mütterliches Elternteil, während eine Königin zwei Elternteile hat.

Der Stammbaum einer Drohne hat daher das folgende Aussehen:



Drohne Königin

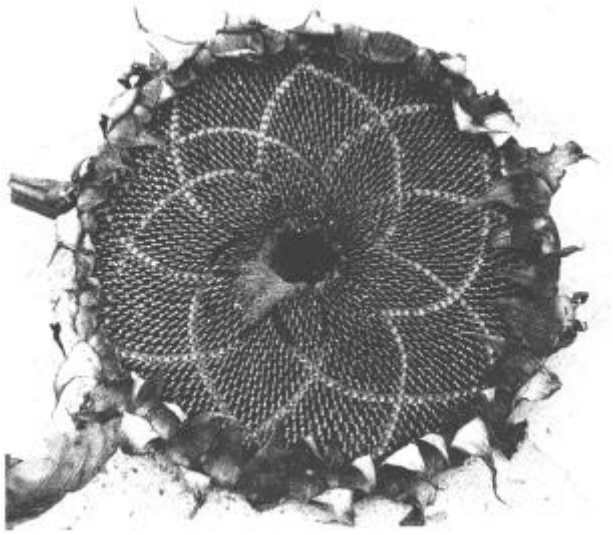


Dieser Stammbaum ist asymmetrisch, da die Anzahl der Weibchen bei den Drohnen-Vorfahren überwiegt.

Für die n-te Elterngeneration ($n \in \mathbb{N}$) einer Drohne ergeben sich a_n Weibchen und a_{n-1} Männchen, wobei mit (a_n) wieder die Fibonacci-Folge bezeichnet sei.

Da wir hier nun schon bei der **Biologie** gelandet sind, sei noch ein weiteres Beispiel aus der Natur angeführt, an dem man die Fibonacci-Zahlen, und damit auch den goldenen Schnitt,

recht gut beobachten kann. Bei den **Sonnenblumen** kann man sehr schön erkennen, daß ihre Kerne in spiralförmigen Linien angeordnet sind.
Jeder Kern gehört zu genau einer links-drehenden und zu genau einer rechts-drehenden Spirallinie.

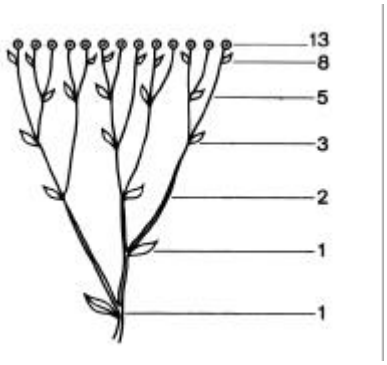


Zählt man alle **linksdrehenden Spiralen** bei einer beliebigen **Sonnenblume**, so erlebt man eine Überraschung: Man erhält interessanterweise bei genauer Zählung stets **Fibonacci-Zahlen**.
Werte, die man in der Natur beobachten kann, sind z.B. 21, 34, 55, 89, 144 oder auch noch 233 linksdrehende Spirallinien in einer Sonnenblumen-Blüte.
Zählt man auch noch die Anzahl der **rechtsdrehenden Spiralen**, so erhält man stets auch wieder eine Fibonacci-Zahl. Bei ein und derselben Sonnenblumen-Blüte erhält man jedoch interessanterweise nicht die gleiche Fibonacci-Zahl, sondern stets eine benachbarte.

Bei der Sonnenblume ist das jeweilige Verhältnis aus links- und rechtsdrehenden Spirallinien in der Blüte also eine hervorragende Annäherung an den goldenen Schnitt.

Macht man sich die Mühe des Zählens bei unserem Bild - vielleicht unter Zuhilfenahme einer Lupe - , so kann man 55 links- und 89 rechtsdrehende Spiralen erkennen. Im Bild wurde jede zehnte Spirale hervorgehoben.

In der Botanik kann man noch viele Beispiele für das Auftreten von Fibonacci-Zahlen, und damit auch vom goldenen Schnitt, entdecken, wie auch das folgende Beispiel zeigt, bei dem es sich um die Skizze einer **Nießwurz** handelt:

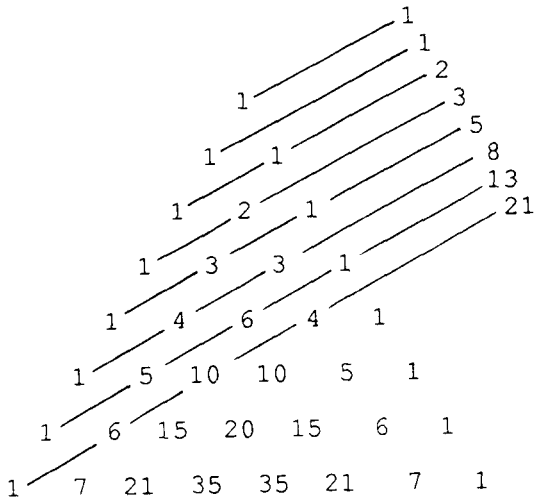


Kommen wir zum Abschluß noch einmal auf die Mathematik zurück. Auch hier lassen sich die **Fibonacci-Zahlen** an so vielen Stellen **entdecken**, daß man sogar eine Zeitschrift herausgegeben hat, die vierteljährlich erscheint und sich außschließlich mit dem Studium dieser Zahlen beschäftigt, das *Fibonacci Quarterly*. Bislang ist dieser Zeitschrift der wissenschaftliche Stoff noch nicht ausgegangen!

Eine hübsche Entdeckung ist beispielsweise das Auftauchen der Fibonacci-Zahlen im berühmten **Pascal-Dreieck**, das bekanntlich rekursiv so aufgebaut ist, daß die Randzahlen aus lauter Einsen bestehen und jede Zahl im Innern des Dreiecks sich als Summe der direkt darüberstehenden Zahlen ergibt. Das Zahlendreieck ist dann symmetrisch (zu seiner Mittelsenkrechten) und in den Zeilen stehen jeweils die **Binomialkoeffizienten**, wobei man hier bei Null zu zählen beginnt. Schaut man sich also die 2-te Zeile an, so erhält man die Binomialkoeffizienten von $(a + b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$. Diese Formel kennen wir aus längst vergangenen Schultagen als binomische Formel.
Oder etwas anspruchvoller: In der 7-ten Zeile stehen die Zahlen 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, so daß wir die Binomialentwicklung von $(a + b)^7$ sofort hinschreiben können:

$$(a + b)^7 = \mathbf{1}a^7 + \mathbf{7}a^6 b + \mathbf{21}a^5 b^2 + \mathbf{35}a^4 b^3 + \mathbf{35}a^3 b^4 + \mathbf{21}a^2 b^5 + \mathbf{7}a\, b^6 + \mathbf{1}b^7 .$$

Die **Fibonacci-Zahlen** erkennt man nun im Pascal-Dreieck als Schrägzeilen-Summen, wie es in folgender Figur dargestellt ist:



Auf S. 33 hatten wir gesehen, daß die Folge $f_n := a_{n+1}/a_n$ der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt τ konvergiert.

Aufgrund der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ folgt nach Division durch a_n :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

so daß wir für die Quotientenfolge die Rekursionsgleichung

$$f_n = 1 + \frac{1}{f_{n-1}} \quad ; \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

haben.
Aus dieser Rekursionsgleichung ergibt sich mit dem Startwert $f_1 = 1$ induktiv:

$f_1 = 1$;

$$f_2 = 1 + \frac{1}{f_1} = 1 + \frac{1}{1} \ ;$$

$$f_3 = 1 + \frac{1}{f_2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} \ ;$$

$$f_4 = 1 + \frac{1}{f_3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$$

usw.

Weil nun $\lim_{n\to\infty} f_n = \tau$ ist, läßt sich der goldene Schnitt τ als ein unendlicher Kettenbruch darstellen, der aus lauter Einsen besteht. Es ist der einfachste - und damit vielleicht schönste - Kettenbruch, den man sich vorstellen kann:

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}$$

Man kann sich mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus (Siehe S. 18f) überlegen, daß jede **rationale** Zahl sich als ein **endlicher**, d.h. abbrechender, **Kettenbruch** schreiben läßt. Wir erkennen also auch hieran noch einmal die Irrationalität des goldenen Schnittes τ .

Es läßt sich der folgende Fundamentalsatz aus der Theorie der Kettenbrüche beweisen:

Satz:	Jede reelle Zahl läßt sich in eindeutiger Weise als Kettenbruch darstellen, und umgekehrt ist jeder Kettenbruch konvergent, so daß er eine relle Zahl darstellt. Der zugehörige Kettenbruch ist genau dann endlich, wenn die Zahl rational ist (d.h. auch, er ist genau dann unendlich, wenn die Zahl irrational ist).

Man könnte also die Theorie der rellen Zahlen über die Kettenbrüche aufbauen.[15]
Historisch gesehen, haben die Kettenbrüche in der Tat im 17. Jahrhundert eine wichtige Rolle bei der Untersuchung irrationaler Zahlen gespielt.

Auch $\sqrt{2}$ besitzt eine einfache Kettenbruchentwicklung, wie man an der folgenden „trickreichen“ Umformung erkennt:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}$$

$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$ usw., d.h. für $\sqrt{2}$ im Kettenbruch wird jeweils der vorhergehende Kettenbruch eingesetzt, so daß man schließlich erhält:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

[15] Vgl. hierzu etwa das schöne Buch: O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I, Stuttgart 1954.

Wie es Kettenbrüche gibt, so gibt es auch **Kettenwurzeln**.

Als Übungsaufgabe möge der Leser selber beweisen, daß auch hier der goldene Schnitt sich dadurch auszeichnet, die einfachste Kettenwurzel-Darstellung zuzulassen, nämlich:

$$\tau = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

Hinweis: Man betrachte die Rekursion: $w_{n+1} = \sqrt{1+w_n}$ und bilde auf beiden Seiten den Grenzwert, den man hier als existent voraussetzen darf (was man streng genommen erst zeigen muß. Wie das geht, lernt man in jedem **Analysis-Kurs**). Man mache sich klar, daß für diesen Grenzwert w die Gleichung $w = \sqrt{1+w}$ gelten muß (hierbei darf man die Gültigkeit von $\lim\sqrt{1+w_n} = \sqrt{1+\lim w_n}$ benutzen, die auch in der **Analysis** bewiesen wird).

Die folgenden beiden Bilder zeigen zwei berühmte Beispiele aus der Architektur zum goldenen Schnitt.

Zunächst das **Parthenon** in Athen, das Perikles in den Jahren 447 - 432 v. Chr. bauen ließ. Die Vorderfront stellt ziemlich genau ein **goldenes Rechteck** dar.

Ein besonders interessantes Beispiel für den goldenen Schnitt in der Architektur stellt der **Dom in Florenz** dar, dessen Baumeister BRUNELLESCHI (1377 - 1446) seine Kuppel so gestaltete, daß ihre Gesamthöhe sich zur Höhe des Ansatzes der Kuppelwölbung verhält wie die beiden Zahlen 144 : 89, also wie $a_{12} : a_{11} (= f_{11})$, was dem goldenen Schnitt schon sehr nahe kommt.

Literatur

BARAVALLE, H.V.: Die Geometrie des Pentagramms und der Goldene Schnitt. Stuttgart 1950.

BEUTELSPACHER, A./PETRI, B: Der Goldene Schnitt. Mannheim 1988.

CANTOR, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1900.

COXETER, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie. Basel 1981.

EUKLID: Die Elemente. Buch I - XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt 1991.

HELLER, S.: Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoräer. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse für Mathematik, Physik und Technik Nr. 6. Berlin 1958.

LAUGWITZ, D.: Die Quadratwurzel aus 5, die natürlichen Zahlen und der Goldene Schnitt. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975.

SCHARK, R.: Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Frankfurt a.M. 1992.

SZABO, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. München/Wien 1969.

TROPFKE, J.: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1 Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Berlin 1980.

WALSER, H.: Der Goldene Schnitt. Stuttgart/Leipzig 1993.

Der

allgemeine goldene Schnitt

und sein Zusammenhang

mit der

harmonischen Theilung.

Ein neuer Beitrag zum Ausbau der Geometrie.

Zugleich

eine Ergänzung zu des Verfassers Schrift:

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung.

Von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1849.

Digitized by Google

Wichtige mathematische Schriften,

welche in **H. W. Schmidt's Verlag** erschienen sind.

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung. Eine reiche Fundgrube von Uebungsaufgaben aus der construirenden Geometrie, ebenen Trigonometrie und Algebra. Von Dr. August Wiegand. 2. gänzlich umgearbeitete u. vermehrte Auflage. 1848. 8. 15 Sgr.

Herr Professor Grunert sagt in seinem Archiv für Mathem. u. Phys. über diese Schrift:

Jeder Mathematiker weiss, wie viele interessante Beziehungen die sogenannten merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks darbieten. Es war daher ein glücklicher Gedanke des Herrn Verfassers, diese ganze Lehre in systematischem Zusammenhange ausführlich zu bearbeiten, und dadurch zugleich ein System höchst zweckmässiger Uebungsaufgaben für die auf dem Titel genannten Theile der Wissenschaft aufzustellen. Die Ausführung dieses Gedankens von Seiten des Herrn Verfassers lässt nichts zu wünschen übrig, und die verschiedenen Aufgaben sind oft mit besonderer Eleganz behandelt; zugleich ist, wenn auch vorzugsweise die trigonometrische und algebraische Methode, die der Hr. Verfasser in dieser Schrift mit vorzüglichem Geschick und oft auf sehr einfache und elegante Weise handhabt, Anwendung gefunden zu haben scheinen, für möglichste Abwechselung der Methoden gesorgt worden, so das wir diese Schrift, so wie zu allgemeiner Berücksichtigung in Bezug auf ihren interessanten Inhalt an sich, namentlich auch allen denen sehr empfehlen, welche sich in der feineren Geometrie zu üben beabsichtigen.

Die äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vorzüglich. Möchte es doch dem Herrn Verfasser gefallen, auch die merkwürdigen Punkte des sphärischen Dreiecks in ähnlicher lehrreicher Weise zu behandeln.

Die Militair-Literatur-Zeitung 1849, No. 9. sagt über diese Schrift:

„Der Verfasser, durch viele elementar-mathematische Schriften rühmlichst bekannt, giebt hier eine Monographie über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks in einer zweiten Auflage, deren erste ein Jahr früher erschien. — Seit Steiner im Jahre 1832 seine wichtige Schrift: „Systemat. Entwickelung der Abhängigkeit geometr. Gestalten von einander" herausgab, hat sich für die Geometrie eine neue Aera eröffnet. Viele Schriftsteller haben seitdem (ausser in den mathem. Journalen) in besonderen Werken das dort Gegebene ausgeführt und bereichert. — Die vorliegende kleine Schrift nennen wir willkommen, und Lehrer, welche ihre Schüler in der neuen Betrachtungsweise der geometrischen Vorstellungen über und für die Sache anregen wollen, werden sich durch die Benutzung der Schrift dem Verfasser verpflichtet fühlen."

Nachdem der Inhalt eingänglich besprochen und ganz besonders auf die „höchst interessanten neuern Resultate, z. B. 20 Gruppen harmonischer Punkte, sowie der allgemeine goldene Schnitt," hingewiesen worden ist, heisst es zum Schlusse:

Die Untersuchungen über die Beziehungen aller dieser Punkte werden hier mit Recht nur andeutend geführt; ihre Ausführung bleibt dem wissbegierigen Leser überlassen; sie würden ein eigenes Buch erfordern. Und zu welchem Umfange müssten erst die Untersuchungen führen, wenn der Verfasser im 4ten Abschnitte die merkwürdigen Punkte des ungleichseitigen Dreiecks mehr als andeutend geben wollte! Dies geschieht kurz in zwei Kapiteln auf etwa 8 Seiten. — Welche Quelle neuer Entdeckungen! Wir brauchen hiernach dem Buche keine Empfehlung zuzufügen. — Auch ist die typographische Ausstattung sehr gut.

Digitized by Google

Der

allgemeine goldene Schnitt

und sein Zusammenhang

mit der

harmonischen Theilung.

Ein neuer Beitrag zum Ausbau der Geometrie.

Zugleich

eine Ergänzung zu des Verfassers Schrift:

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung.

Von

Dr. **August Wiegand,**

Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

UNIV OF ILLINOIS

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1849.

Digitized by Google

UNIV. OF CALIFORNIA

Vorwort.

In der Absicht meinen Schülern Gelegenheit zu geben, selbstthätig neue Sätze im Gebiete der sogenannten neueren Geometrie aufzufinden, gab ich ihnen vor einigen Jahren Anleitung, diejenigen gleichschenkligen Dreiecke zu untersuchen, in denen die sogenannten merkwürdigen Punkte und die Höhenendpunkte Gruppen harmonischer Punkte bilden. Die betreffenden Untersuchungen ergaben des Interessanten so Mancherlei, dass ich die gewonnenen Resultate in einer kleinen Schrift: „Sätze über harmonische Verhältnisse“ im Jahre 1847 herausgab, welche unter dem veränderten Titel: „Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung“ im vorigen Jahre in zweiter Auflage erschienen ist. Es ergab sich bei diesen Untersuchungen, dass sich eine ganze Partie derartiger Dreiecke mit Hülfe des Problems vom goldenen Schnitte in einer allgemeineren Fassung construiren liessen. Da jedoch eine noch grössere Anzahl der bezeichneten Dreiecke ausserhalb dieser allgemeinen Construktionsregel stehen blieben, so stand zu vermuthen, dass eine noch allgemeinere Fassung des vorgenannten Problems auch eine Construktionsregel für die noch übrigen Dreiecke ergeben werde. In der

437527

Digitized by Google

That haben mich nun meine weiteren Untersuchungen dieses Gegenstandes auf eine derartige allgemeine Fassung des Problems vom goldenen Schnitte geführt. Nach diesem merkwürdigen Zusammenhange des allgemeinen goldenen Schnitts mit der harmonischen Theilung zu schliessen, dürfte derselbe vielleicht als berufen erscheinen, in der Geometrie überhaupt noch eine Hauptrolle zu spielen. Ich für meinen Theil werde diesem Gegenstande meine Aufmerksamkeit nicht entziehen, kann jedoch trotzdem den Wunsch nicht unterdrücken, dass auch andere Mathematiker ihr Augenmerk auf denselben richten möchten.

Halle, den 10. Aug. 1849.

Dr. *Wiegand.*

Digitized by Google

I.

Gruppen harmonischer Punkte.

Es mögen im Folgenden o die Spitze, u der Mittelpunkt des umschriebenen, e der des eingeschriebenen Kreises, s der Schwerpunkt, h der Höhendurchschnitt, g der Höhenfusspunkt und ε der Mittelpunkt des zwischen den Schenkeln liegenden äussern Berührungskreises bei einem gleichschenkligen Dreiecke bezeichnen. Setzen wir den Schenkel $= a$ und die Grundlinie $= x$, so haben die in vorgenannter Schrift durchgeführten Untersuchungen für nachfolgende Werthe von x die beistehenden Gruppen harmonischer Punkte ergeben.

1) $x = (\sqrt{3}-1)\,a$ . . . . $o, u, e, g.$ / $o, e, h, g.$ / $\varepsilon, g, h, u.$ / $\varepsilon, h, u, o.$

2) $x = (\sqrt{5}-1)\,a$ . . . . . $\varepsilon, s, h, o.$

3) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,a$. . . . $o, s, e, h.$

4) $x = \frac{1}{2}\,a$ . . . . . $o, s, e, g.$

5) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)\,a$. . . $\varepsilon, u, g, s.$

6) $x = \frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)\,a$. . . $u, s, e, g.$

7) $x = (\sqrt{33}-1)\,a$. . . . . $o, e, u, g.$

8) $x = \frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)\,a$. . . $o, h, e, g.$ / $\varepsilon, g, u, h.$ / $\varepsilon, u, h, o.$

Digitized by Google

9) $x = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,.\,a$ . . . . . $o, s, u, g.$

10) $x = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,.\,a$ . . . . . $o, s, h, g.$

11) $x = \sqrt{3}\,.\,a$ . . . . . $\begin{cases} o, s, g, u. \\ h, o, s, u. \end{cases}$

12) $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.\,a$ . . . . . $\begin{cases} o, h, s, g. \\ h, s, u, g. \end{cases}$

13) $x = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,.\,a$ . . . . . $h, s, g, u.$

14) $x = \frac{1}{3}\,.\,a$ . . . . . $\varepsilon, e, s, o.$

15) $x = \frac{2}{3}\,.\,a$ . . . . . $\begin{cases} \varepsilon, e, s, h. \\ \varepsilon, g, h, s. \end{cases}$

16) $x = \frac{4}{3}\,.\,a$ . . . . . $\varepsilon, g, s, h.$

17) $x = \frac{3}{2}\,.\,a$ . . . . . $\varepsilon, u, s, o.$

18) $x = \sqrt{2}\,.\,a$ . . . . . $\varepsilon, g, e, h.$

19) $x = (2-\sqrt{2})\,a$ . . . . . $\varepsilon, h, s, o.$

20) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-3)\,a$ . . . $\begin{cases} \varepsilon, e, u, o. \\ \varepsilon, g, h, e. \end{cases}$

21) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\,.\,a$ . . . $\varepsilon, s, o, h.$

22) $x = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\,a$ . . . . $\varepsilon, g, u, s.$

23) $x = \frac{1}{4}(\sqrt{33}+1)\,a$ . . . $\begin{cases} h, o, e, u. \\ u, e, h, g. \\ \varepsilon, u, g, o. \end{cases}$

24) $x = \frac{1}{6}(\sqrt{73}+1)\,a$ . . . . $\varepsilon, e, o, h.$

25) $x = \frac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{17}}\,.\,a$ . . . $h, o, g, u.$

26) $x = \frac{1}{2}\sqrt{9-\sqrt{17}}\,.\,a$ . . . $o, h, u, g.$

Digitized by Google

II.

Der allgemeine goldene Schnitt.

Um eine allgemeine Regel zur Construktion solcher gleichschenkligen Dreiecke, in welchen die vorher aufgeführten Gruppen harmonischer Punkte vorkommen, zu erhalten, stellen wir vorerst folgende das Problem vom goldenen Schnitte verallgemeinernde

Aufgabe. Vom $2^m . 3^\mu$fachen einer gegebenen Linie a ein Stück x abzuschneiden, welches das geometrische Mittel ist zwischen dem Reste und dem $2^n . 3^\nu$fachen der Linie a, wo die Exponenten m, μ, n, ν positive oder negative Zahlen sind, welche sich in ein Product aus einer ganzen Zahl und einer Potenz von der 2, deren Exponent eine positive oder negative ganze Zahl und auch Null sein kann, zerlegen lassen.

Auflösung. Man trage eine Linie MN (die Figur ist leicht zu entwerfen) $= 2^{\frac{1}{2}(m+n)} . 3^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} . a$, was nach der gemachten Bestimmung immer möglich ist, ab, errichte in einem ihrer Endpunkte N ein Loth $NO = 2^n . 3^\nu . a$, beschreibe über NO als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt C sein möge, ziehe MC, welche die Kreisperipherie in Q schneiden möge und trage auf MN das Stück $MR = MQ$ ab, so ist MR das gesuchte von $2^m . 3^\mu . a$ abzuschneidende Stück.

Beweis.

Bezeichnen wir MR mit x, so ist zu zeigen, dass

$$x^2 = 2^n . 3^\nu . a \, (2^m . 3^\mu . a - x)$$

Digitized by Google

ist. Verlängern wir MC bis sie den Kreis zum zweiten Male in P schneidet, so ist

$$\begin{aligned} MN^2 &= MP \,.\, MQ. \\ &= (MQ+PQ)\; MQ \\ &= (MR+NO)\; MR \end{aligned}$$

oder nach Einsetzung der betreffenden Werthe

$$2^{m+n}.3^{\mu+\nu}.a^2 = (x+2^n.3^\nu.a)\,x,$$

woraus sich leicht

$$x^2 = 2^n.3^\nu.a(2^m.3^\mu - x)$$

ergiebt, was zu beweisen war.

Die algebraische Lösung dieser Gleichung giebt nun, wenn wir blos die Wurzel mit dem positiven Quadratwurzelausdrucke nehmen:

$$x = (-2^{n-1}.3^\nu) + \sqrt{2^{2n-2}.3^{2\nu} + 2^{m+n}.3^{\mu+\nu}}\,.a,$$

welche nach gehöriger Entwickelung übergeht in:

$$x = \frac{\sqrt{1+2^{m-n+2}.3^{\mu-\nu}} - 1}{2^{1-n}.3^{-\nu}}\,.a,$$

oder wenn wir

$$\begin{aligned} m-n+2 &= p, \\ 1-n &= q, \\ \mu-\nu &= \pi, \\ -\nu &= \varkappa \end{aligned}$$

setzen, wo offenbar für p, q, π, $\varkappa$ immer noch dieselbe Bestimmung gilt, die in der Aufgabe für m, n, μ, ν getroffen worden ist,

$$x = \frac{\sqrt{1+2^p.3^\pi} - 1}{2^q.3^\varkappa}\,.a \quad \ldots \quad (A).$$

Digitized by Google

III.

Zusammenhang des allgemeinen goldenen Schnitts mit den frühern Gruppen harmonischer Punkte.

In dem vorher unter (*A*) aufgestellten Ausdrucke sind sämmtliche vorher unter 1) bis 20) aufgeführte Werthe von x enthalten. Wir geben im Folgenden eine Tabelle für die den beistehenden Werthen von x entsprechenden Werthe der Exponenten p, q, π, $\varkappa$, wobei wir die vorige Reihenfolge beibehalten.

Digitized by Google

Werthe von x.	Werthe von p, q, π, $\varkappa$.
1) $(\sqrt{3}-1)a$	1, 0, 0, 0.
2) $(\sqrt{5}-1)a$	2, 0, 0, 0.
3) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a$ . .	2, 1, 0, 0.
4) $\frac{1}{2}a$	3, 2, 0, 0.
5) $\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)a$. .	4, 1, 0, 0.
6) $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)a$.	4, 2, 0, 0.
7) $(\sqrt{33}-1)a$ . . .	5, 0, 0, 0.
8) $\frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)a$.	5, 2, 0, 0.
9) $\frac{1}{2}\sqrt{6}.a$	0, $\frac{3}{2}$, 1, $-\frac{1}{2}$.
10) $\frac{1}{3}\sqrt{6}.a$	0, $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$.
11) $\sqrt{3}.a$	0, 0, 1, $-\frac{1}{2}$.
12) $\frac{2}{3}\sqrt{3}.a$	0, -1, 1, $\frac{1}{2}$.
13) $\frac{2}{3}\sqrt{6}.a$	0, $-\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$.
14) $\frac{1}{3}.a$	0, 0. 1, 1.
15) $\frac{2}{3}.a$	0, -1, 1, 1.
16) $\frac{4}{3}.a$.	0, -2, 1, 1.
17) $\frac{3}{2}.a$	0, 1, 1, -1.
18) $\sqrt{2}.a$.	0, $-\frac{1}{2}$, 1, 0.
19) $(2-\sqrt{2}).a$ . . .	0, $-\frac{1}{2}$, 0, 0.
20) $\frac{1}{2}(\sqrt{17}-3)a$.	3, 1, -2, -1.

Es geht also aus dem Bisherigen hervor, dass alle Dreiecke, welche die vorher aufgeführten Werthe von x zu Grundlinien haben, nach einem und demselben Verfahren construirt werden können, indem man mittelst des Problems vom allgemeinen goldenen Schnitte die Grundlinie aus dem Schenkel findet, wenn man in der früheren Formel (*A*) für p, q,

Digitized by Google

π, $\varkappa$ die nebenstehenden Werthe in der Tabelle setzt. Bestimmen wir die Exponenten m, n, μ, ν durch die Exponenten p, q, π, $\varkappa$, so ergiebt sich

$$m = p - q - 1$$
$$n = 1 - q$$
$$\mu = \pi - \varkappa$$
$$n = -\varkappa.$$

Hieraus erhält man für m, n, μ, ν folgende Tabelle:

	Werthe für			
	m,	n,	μ,	ν.
1)	0,	1,	0,	0.
2)	1,	1,	0,	0.
3)	0,	0,	0,	0.
4)	0,	-1,	0,	0.
5)	2,	0,	0,	0.
6)	1,	-1,	0,	0.
7)	4,	1,	0,	0.
8)	2,	-1,	0,	0.
9)	$\frac{5}{2}$,	$-\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{1}{2}$.
10)	$-\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$.
11)	-1,	1,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{1}{2}$
12)	0,	2,	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$.
13)	$\frac{1}{2}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{2}$.
14)	-1,	1,	0,	-1.
15)	0,	2,	0,	-1.
16)	1,	3,	0,	-1.
17)	-2,	0,	2,	1.
18)	$-\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	1,	0.
19)	$-\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	0,	0.
20)	1,	0,	-1,	1.

Digitized by Google

Die noch übrigen Werthe unter 21) bis 26) sind zwar nicht in dem Ausdrucke (*A*) enthalten, stehen gleichwohl aber mit dem allgemeinen goldenen Schnitte in einem eigenthümlichen Zusammenhange, welcher die rein geometrische Construktion der betreffenden Dreiecke möglich macht, wie die nachfolgenden Entwickelungen zeigen.

21) a) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\,a$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{a\sqrt{5}-1}\cdot a$$

$$= \frac{a}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a}.$$

Es ist somit x die dritte Proportionale zu dem grössern Stücke des nach dem einfachen goldenen Schnitte getheilten Schenkels a zu a selbst.

b) Aber auch noch auf einem andern Wege kommt man zum goldenen Schnitte. Bezeichnen wir nämlich den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit α, die übrigen mit β, so ist

$$\cos\beta = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$$

$$\cos\beta^2 = \tfrac{1}{16}(6+2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{8}(3+\sqrt{5})$$

$$2\cos\beta^2 = 1+\cos 2\beta = \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$\cos 2\beta = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

oder $\cos\alpha = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$.

22) a) $x = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\,a$,

welches nach ähnlicher Entwickelung übergeht in

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}-1} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

Die Construktion von x ist hier ebenfalls möglich mit Hülfe des einfachen goldenen Schnittes.

b) $\cos\beta = \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)$

$$= \frac{\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-1}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$\sec\beta = 2(\sqrt{5}-1).$$

23) a) $x = \frac{1}{4}(\sqrt{33}+1)\,a$

$$= \frac{a}{\frac{1}{8}(\sqrt{33}-1)}.$$

Hier wird x mit Hülfe des goldenen Schnitts gefunden, wenn man

$$p=5,\ q=3,\ \pi=0,\ \varkappa=0$$

setzt.

b) $\cos\beta = \frac{1}{8}(\sqrt{33}+1)$

$$= \frac{4}{\sqrt{33}-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)}.$$

$$\sec\beta = \frac{1}{4}(\sqrt{33}-1)$$

24) a) $x = \frac{1}{6}(\sqrt{73}+1)\,a$

$$= \frac{a}{\frac{1}{12}(\sqrt{73}-1)}.$$

Auch hier lässt sich x nach dem allgemeinen goldenen Schnitte finden, wenn man

$$p=3,\ q=2,\ \pi=2,\ \varkappa=1$$

nimmt.

25) a)

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{9+\sqrt{17}}\,.\,a,$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}(9+\sqrt{17})\,a^2,$$

$$\frac{x^2}{2} = (\tfrac{9}{8}+\tfrac{1}{8}\sqrt{17})\,a^2,$$

$$\frac{x^2}{2} - a^2 = \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{17})\,a^2$$

$$= \frac{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)}{8(\sqrt{17}-1)}\,.\,a^2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{17}-1}\,.\,a^2,$$

Digitized by Google

$$x^2 = 2\left(\frac{a^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)} + a^2\right).$$

Es lässt sich also auch hier x mit Hülfe des allgemeinen goldenen Schnittes construiren, wenn man

$$p=4,\ \pi=0,\ q=1,\ \varkappa=0$$

nimmt.

b) $\cos\beta = \frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{17}}.a,$

$\cos\beta^2 = \frac{1}{26}(9+\sqrt{17}).a,$

$2\cos\beta^2 = \frac{1}{8}(9+\sqrt{17}).a,$ oder

$1+\cos 2\beta = (\frac{9}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17})a,$

$\cos 2\beta = \frac{1}{8}(1+\sqrt{17})$

$= \frac{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)}{8(\sqrt{17}-1)}$

$= \frac{2}{\sqrt{17}-1}$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)}$

mithin $\sec 2\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).$

oder $\sec\alpha = -\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).$

Es geht hieraus hervor, dass das Dreieck ein an der Spitze stumpfwinkliges ist.

26) a) $x = \frac{1}{2}(\sqrt{9-\sqrt{17}}).a,$

$x^2 = \frac{1}{4}(9-\sqrt{17})a^2,$

$\frac{x^2}{2} = (\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{17})a^2,$

$a^2-\frac{x^2}{2} = \frac{1}{8}(\sqrt{17}-1)a^2$

$x^2 = 2(a^2-\frac{1}{8}(\sqrt{17}-1)a^2).$

Man findet hieraus x mit Hülfe des allgemeinen goldenen Schnittes, wenn man

$$p=4,\ q=4,\ \pi=0,\ \varkappa=0$$

setzt.

Digitized by Google

b) $\cos\beta = \frac{1}{4}(\sqrt{9-\sqrt{17}})$,

$\cos\beta^2 = \frac{1}{16}(9-\sqrt{17})$

$2\cos\beta^2 = 1+\cos 2\beta = \frac{1}{8}(9-\sqrt{17})$

$\cos 2\beta = \frac{1}{8}(1-\sqrt{17})$

$\cos\alpha = \frac{1}{8}(\sqrt{17}-1)$.

Es ergiebt sich somit, dass die Dreiecke, in denen die merkwürdigen Punkte des gleichschenkligen Dreiecks mit den Höhenendpunkten Gruppen harmonischer Punkte bilden, sich sämmtlich mit Hülfe des allgemeinen goldenen Schnittes construiren lassen. —

Schlussbemerkung. Zu der vollständigsten Verallgemeinerung des goldenen Schnitts würde man auf dem betretenen Wege offenbar gelangen, wenn man in Formel (*A*) den Potenzen von 2 und 3 noch Potenzen aller Primzahlen der Reihe nach hinzufügte. Dass das Problem hierdurch an Bedeutsamkeit noch mehr gewinnen werde, lässt sich, nach dem Bisherigen zu schliessen, nicht bezweifeln. Möge es deshalb auch in dieser Fassung der Aufmerksamkeit der Mathematiker empfohlen sein.

Digitized by Google

UNIVERSITY OF LIBRARIA LIBR

Inhalt.

I. Gruppen harmonischer Punkte . . . . . Seite 5

II. Der allgemeine goldene Schnitt . . . . . „ 7

III. Zusammenhang des allgemeinen goldenen Schnitts mit den früheren Gruppen harmonischer Punkte . . . . . „ 9

93 fb

Digitized by Google